PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

4.4 GROSSMAN – ED. 7

BLOQUE III . UNIDAD 7

DEFINICIÓN

Producto cruz

Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz (cruz vectorial)** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un nuevo vector definido por

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}} \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

El producto cruz fue definido por Hamilton en uno de una serie de artículos publicados en *Philosophical Magazine* entre 1844 y 1850.

Veamos un teorema que nos permitirá luego calcular el producto cruz de forma más sencilla.

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.

Teorema 4.4.1

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}$$

que es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ según la definición 4.4.1.

En realidad no estamos calculando el determinante, dado que i, j y k son vectores; pero el método nos permite calcular el producto cruz sin tener que recurrir a la fórmula expresada en la definición.

CÁLCULO DEL PRODUCTO CRUZ ENTRE VECTORES

EJEMPLO 4.4.2 **Uso del teorema 4.4.1 para calcular un producto cruz**

Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10)\mathbf{i} - (2-15)\mathbf{j} + (-4+12)\mathbf{k}$$

$$= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

PROPIEDADES

Teorema 4.4.2

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto escalar** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$).

vii) Si $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Del apartado vi. podemos concluir que los vectores **u** y **uxv** son ortogonales, al igual que **v** y **uxv**.

VECTOR NORMAL

Se sabe que u x v es un vector ortogonal a u y v, pero siempre habrá dos vectores unitarios ortogonales a u y v (vea la figura 4.27). Los vectores n y -n (n por la letra inicial de normal) son ambos ortogonales a u y v.

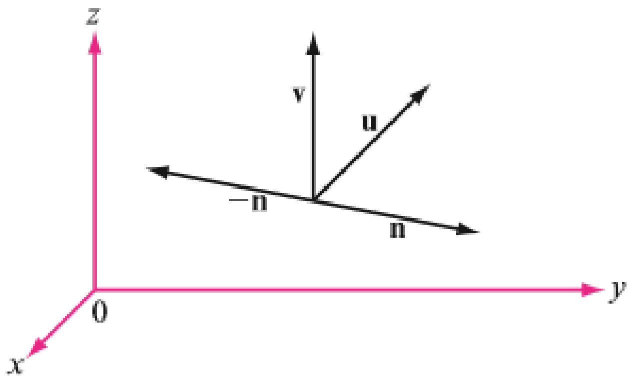


Figura 4.27

Existen exactamente dos vectores, **n** y −**n**, ortogonales a dos vectores no paralelos **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$.

ÁNGULO ENTRE VECTORES, OTRA FORMA DE CALCULARLO

Teorema 4.4.3

Si φ es un ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi} \tag{4.4.2}$$

Demostración

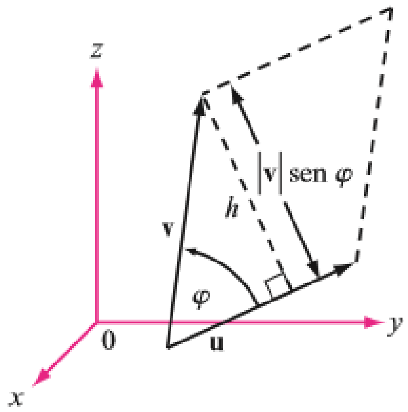
No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (vea el problema 40). Entonces, como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi$ (del teorema 4.3.2, página 263),

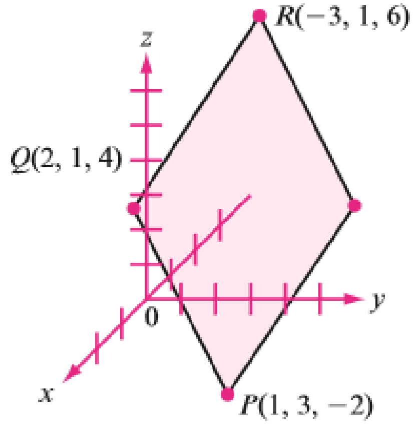
$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que $\operatorname{sen} \varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Una aplicación del producto cruz

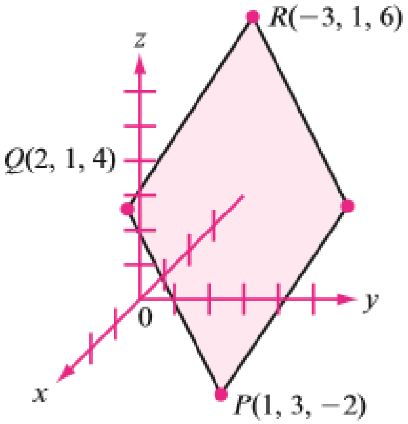
El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\varphi = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ **(4.4.3)**





¿Por qué?

Cálculo del área de un paralelogramo



$$\text{Área} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |-4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1140} \text{ unidades cuadradas.}$$

Vemos otra aplicación

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores que no están en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio (vea la figura 4.32). Calculemos su volumen. La base del paralelepípedo es un paralelogramo. Su área, de (3), es igual a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

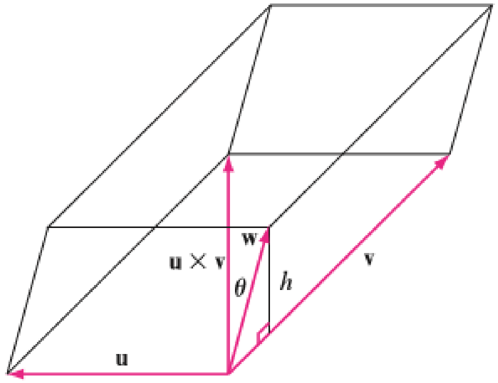


Figura 4.32

Tres vectores **u**, **v** y **w**, que no están en el mismo plano, determinarán un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**, y por ello es ortogonal al paralelogramo determinado por **u** y **v**. La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogramo.

Del análisis de la proyección en la página 251, se ve que h es el valor absoluto de la componente de **w** en la dirección (ortogonal) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así, de la ecuación (4.3.10) en la página 264:

$$h = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ en la dirección } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left| \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right|$$

Entonces

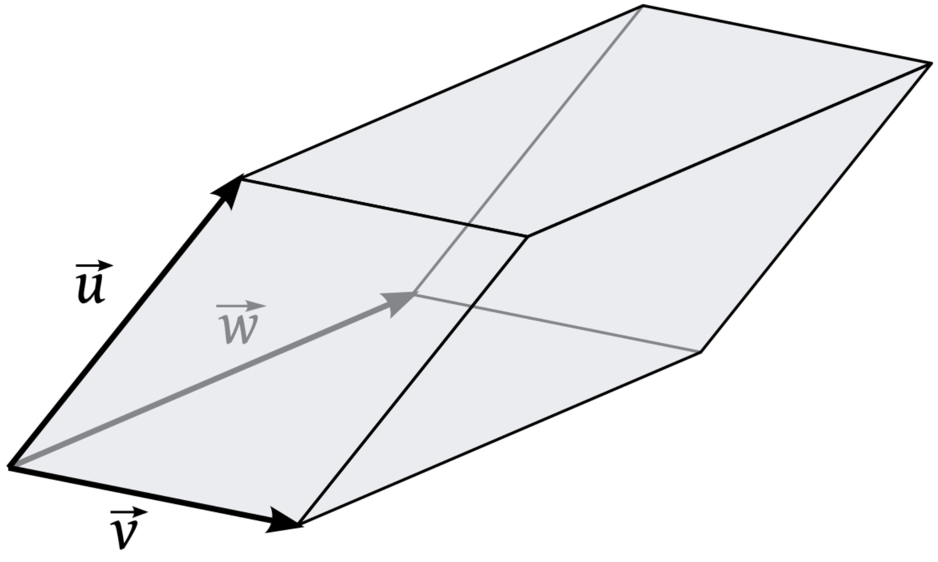
$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área de base} \times \text{altura}$$

$$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \left[\frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right] = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$$

Es decir,

El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores **u**, **v** y **w** es igual a $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$. Dicho de otro modo, valor absoluto del triple producto escalar de **u**, **v** y **w**. **(4.4.4)**

Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.



AUTOEVALUACIÓN 4.4

I) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{i} =$ _____.

a) 0 *b)* $\mathbf{j}$ *c)* $2\mathbf{j}$ *d)* $-2\mathbf{j}$

II) $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

III) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* no está definido

IV) $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

V) El seno del ángulo entre los vectores **u** y **w** es ______.

a) $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}$

c) $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}$ *d)* $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|$

VI) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} =$ ______.

a) $|\mathbf{u}|^2$ *b)* 1 *c)* 0 *d)* $\mathbf{0}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) II) *c*) III) *b*) = vector cero [**Nota.** $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ *está* definido porque $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{i} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{k})]$

IV) *d*) V) *a*) VI) *c*) = vector cero