# ÁNGULOS ENTRE VECTORES PROYECCIÓN

4.2 GROSSMAN – ED. 7

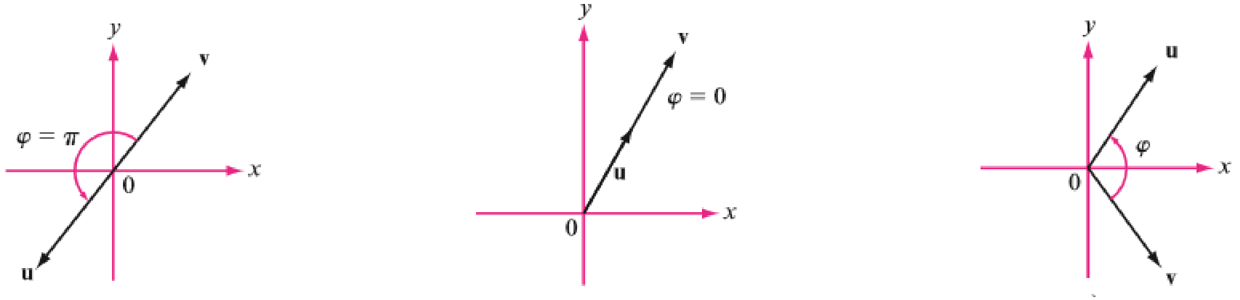
BLOQUE III . UNIDAD 7

# ÁNGULOS ENTRE VECTORES

**Definición 4.2.1**

**Ángulo entre vectores**

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo $\varphi$ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$** está definido como el ángulo no negativo más pequeño[†] entre las representaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar $\alpha$, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.



Veamos un teorema que nos permitirá luego plantear una forma de calcular el ángulo entre dos vectores.

**Teorema 4.2.1** La magnitud de un vector en términos del producto escalar

**Demostración**

Sea $\mathbf{v}$ un vector. Entonces

$$\boxed{|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad (4.2.2)$$

**Demostración**

Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

Aquí debemos recordar cómo está definido el producto punto (o escalar) de vectores.

# CÁLCULO DEL ÁNGULO ENTRE VECTORES

**Teorema 4.2.2**

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Si $\varphi$ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}} \qquad (4.2.3)$$

Verifiquémoslo para un caso.
u= (1, -2)
v= (-3, 6)

## LA DEMOSTRACIÓN

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Si $\varphi$ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}}$$

### Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10, página 223) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

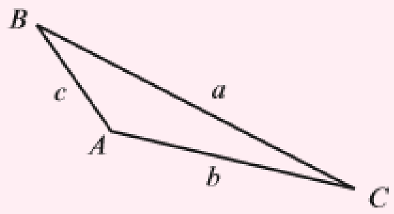



**Figura 4.12**

Triángulo con lados *a*, *b* y *c*.

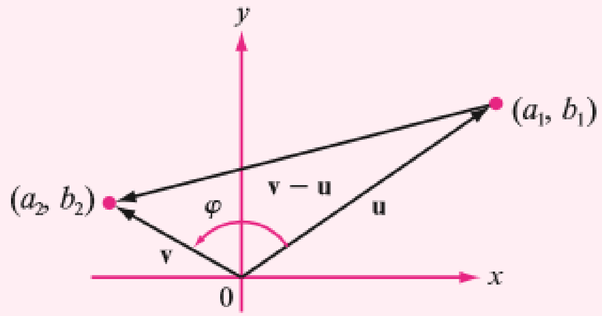



**Figura 4.13**

Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de **u** y **v** con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$. Pero

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 \overset{\text{de (4.2.2)}}{=} (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \overset{\text{teorema 2.2.1 iii), página 64}}{=} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$, y el teorema queda demostrado.

# VECTORES PARALELOS

## Definición 4.2.2

**Vectores paralelos**

Dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o $\pi$. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

## Teorema 4.2.3

Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante $\alpha$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

## VECTORES ORTOGONALES

**Definición 4.2.3**

**Vectores ortogonales**

Los vectores **u** y **v** diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

**Teorema 4.2.4**

Los vectores **u** y **v** diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

¿Por qué?

-dato

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}}$$

Porque el coseno es 0 en $\frac{\pi}{2}$, esto es, cuando el ángulo es ortogonal.

## Un ejemplo

**EJEMPLO 4.2.3 Dos vectores ortogonales**

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

**Solución** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)} = 0$, y como $\varphi$ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

PROYECCIÓN

Lo analizamos gráficamente

## Definición 4.2.4

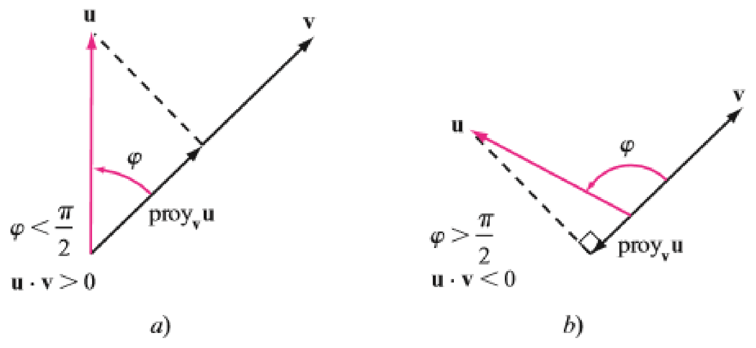
### Proyección

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}} \qquad (4.2.4)$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. (4.2.5)

Observe que $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de **v**.



## Vemos un ejemplo

**EJEMPLO 4.2.4 Cálculo de una proyección**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

**Solución** $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \left[\frac{5}{(\sqrt{2})^2}\right]\mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{j}$ (vea la figura 4.16).

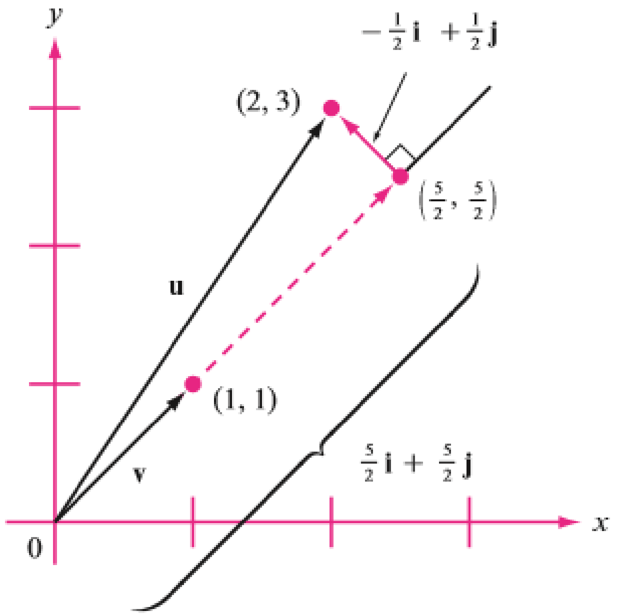



**Figura 4.16**

La proyección de (2, 3) sobre (1, 1) es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

## Vemos otro ejemplo

**EJEMPLO 4.2.5 Cálculo de una proyección**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

**Solución** En este caso $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 4.17).

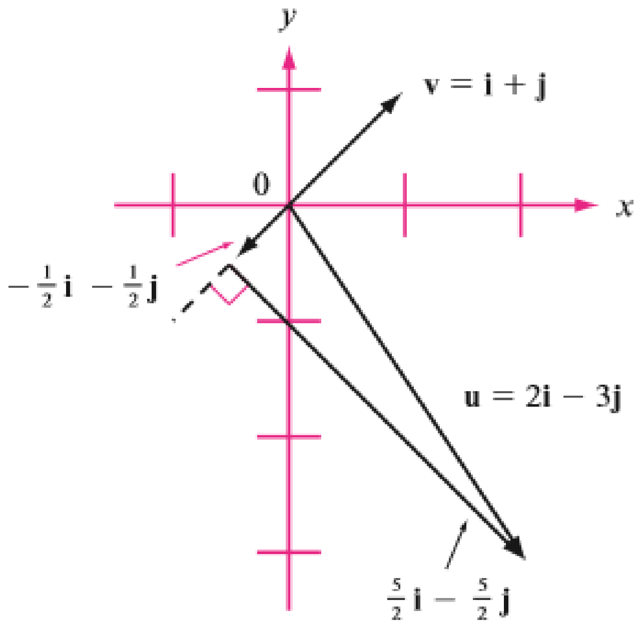



**Figura 4.17**

La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

4 observaciones para analizar

*Observación 1.* De las figuras 4.14 y 4.15 y del hecho de que $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ se deduce que

$\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen:
i) la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > \mathbf{0}$ y
ii) direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < \mathbf{0}$.

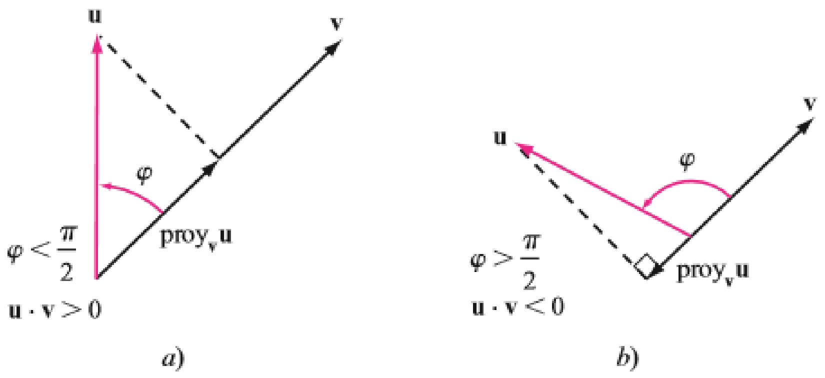



**Figura 4.15**

*a)* $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$,
*b)* $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

*Observación 2.* Se puede pensar en la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ como la componente de $\mathbf{v}$ del vector $\mathbf{u}$.

*Observación 3.* Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, de manera que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = 0$.

*Observación 4.* Una definición alternativa de la proyección es: si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero, entonces $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es el único vector con las siguientes propiedades:

i) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$.
ii) $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. → Ver teorema 4.2.5

# Actividad

## AUTOEVALUACIÓN 4.2

**I)** $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} =$ ________.

*a)* 1 *b)* $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}$

*c)* 0 *d)* $\mathbf{i}+\mathbf{j}$

**II)** $(3, 4) \cdot (3, 2) =$ ________.

*a)* $(3+3)(4+2) = 36$ *b)* $(3)(3) + (4)(2) = 17$

*c)* $(3-3)(2-4) = 0$ *d)* $(3)(3) - (4)(2) = 1$

**III)** El coseno del ángulo entre $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ es ________.

*a)* $0\mathbf{i}+0\mathbf{j}$ *b)* 0 *c)* $\sqrt{2}$ *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{2+0}}$

**IV)** Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}$ son ________.

*a)* Ni paralelos ni ortogonales *b)* Paralelos

*c)* Ortogonales *d)* Idénticos

**V)** $\text{Proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} =$ ____________.

*a)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|}\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

**Respuestas a la autoevaluación**

I) *c)* II) *b)* III) *b)* IV) *c)* V) *c)*