	Análisis de Sistemas Lógica y Álgebra
	TP Nº 6 "Vectores en R^2 y R^3"
	Alumno: Año académico:

El estudio de vectores, junto con el de matrices es la médula del álgebra lineal. El concepto de vector comenzó esencialmente con el trabajo del matemático irlandés sir William Hamilton (1805-1865). Su deseo de encontrar una forma de representar un cierto tipo de objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que él llamó cuaterniones. Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se conoce como vectores. En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.
Ya hemos estudiado los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En este trabajo práctico trabajaremos con el concepto algebraico y geométrico de un vector, base que nos permitirá luego abordar el concepto de espacio vectorial.

VECTORES EN EL PLANO

1. En los siguientes ejercicios, encontrá la magnitud y dirección del vector dado.

   1. $\mathbf{v} = (-4, 4)$ **2.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$ **3.** $\mathbf{v} = (7, 9)$ **4.** $\mathbf{v} = (-4, -4)$

   5. $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, -2)$ **6.** $\mathbf{v} = (-8, 9)$ **7.** $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$ **8.** $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3})$

2. Sea **u** = (2,3) y **v** = (-5,4). Encontrá: a) 3u; b) **u+v**; c) **v-u**; d) 2**u**-7**v**
3. ¿Es unitario el vector (3/5, 4/5)? ¿Y el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$? Justifica.
4. En los siguientes ejercicios, encontrá un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

   27. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

   31. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ **32.** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}; \quad a \neq 0$

5. Demostrá que si **v**= ai+bj es un vector no nulo, entonces **u** es un vector unitario.

$$\mathbf{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$$

6. En los siguientes ejercicios, encontrá un vector unitario v que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado u.

   38. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{u}$ **39.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **41.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{u}$

7. En cada caso, hallá las coordenadas del vector v con la magnitud y dirección dada.

   49. $|\mathbf{v}| = 3, \theta = \frac{\pi}{6}$ **50.** $|\mathbf{v}| = 1, \theta = -\frac{\pi}{3}$ **51.** $|\mathbf{v}| = 8, \theta = \frac{\pi}{3}$

   52. $|\mathbf{v}| = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$ **53.** $|\mathbf{v}| = 9, \theta = \frac{2\pi}{3}$ **54.** $|\mathbf{v}| = 6, \theta = \frac{2\pi}{3}$

8. Hallá los valores de m para que los siguientes vectores tengan el módulo dado:
   a) v = (m-1, 3) $|v|=5$
   b) v = (-2, m) $|v|=4$
9. Dados los puntos M= (1,3) ; N=(3,7); P= (5,1) y Q = (2,6), determiná, sin representarlos gráficamente, si los siguientes vectores son equivalentes:
   a) $\overline{\mathbf{MP}}$ **y** $\overline{\mathbf{NQ}}$
   b) $\overline{MN}$ *y* $\overline{PQ}$

10. Calculá **a.b** sabiendo que **a** y **b** son vectores en R^2 no nulos y |**a**|=4 y **b** = 3a.
11. Calculá el ángulo determinado por los siguientes vectores.

2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j};\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **3.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i};\ \mathbf{v} = -7\mathbf{j}$

5. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i};\ \mathbf{v} = 18\mathbf{j}$ **6.** $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i};\ \mathbf{v} = \beta\mathbf{j};\ \alpha, \beta$ reales

8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

12. Demostrá que para cualesquiera números reales a y b, los vectores **u** = ai + bj y **v** = bi - aj son ortogonales. Ejemplifica esta propiedad planteando 3 pares de vectores ortogonales.
13. Se sabe que el ángulo determinado por los vectores a y b es de 120°. Si **a** = (m, 2) y **b** = (3, -4), hallá el valor de m.
14. Hallá los ángulos del tiángulo cuyos vértices son (9,5); (7,3) y (4,5).
15. En los siguientes ejercicios, determiná si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos.

14. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j};\ \mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ **15.** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j};\ \mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **17.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

18. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ **19.** $\mathbf{u} = 7\mathbf{i};\ \mathbf{v} = -23\mathbf{j}$

16. Sean **u** = -3i + 6j y **v** = 2i + ***α***j. Determiná ***α*** tal que:

a) **u** y **v** son ortogonales. *b)* **u** y **v** son paralelos.
c) El ángulo entre **u** y **v** es $\frac{\pi}{4}$. *d)* El ángulo entre **u** y **v** es $\frac{\pi}{3}$4.

17. Calculá en los siguientes problemas la proyección de **u** respecto de **v.**

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j};\ \mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j};\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ **30.** $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j};\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **32.** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

Sean $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\ \overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\ \overrightarrow{PQ}$. 18.

Sean $P = (-1, 4)$, $Q = (3, -1)$, $R = (-7, -5)$ y $S = (1, 1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PR}}\ \overrightarrow{QS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{QS}}\ \overrightarrow{PR}$.

VECTORES EN EL ESPACIO

19. De los problemas siguientes, encontrá la distancia entre los puntos:

1. $(3, -4, 7); (3, -4, 9)$ **5.** $P = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $(-2, 1, 3); (4, 1, 3)$

20. Encontrá la magnitud y los cosenos directores del vector dado en cada punto.

7. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **8.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

10. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$ **11.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **12.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

13. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **14.** $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **15.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

21. Proponé las coordenadas de un vector ortogonal a (1,-3,5). ¿Cuántos hay?
22. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\frac{\pi}{2}$ radianes. ¿Cuál es el vector?
23. Encontrá un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del hallado en el ejercicio anterior (punto 19).
24. . Sea $P = (-2, 1, 4)$ y $Q = (3, 5, -8)$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

    . Sea $P = (3, 1, -3)$ y $Q = (3, 6, -3)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección es opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$.

PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

25. En los siguientes ejercicios, encontrá el producto cruz de los vectores **u** y **v**.

1. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

3. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

9. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

26. Encontrá dos vectores unitarios ortogonales tanto a **u** = i + 3j - 6k como a **v** = 2i + j + 2k.
27. Encontrá dos vectores unitarios ortogonales tanto a **u** como a **v** si **u**= (2,1,-1) y **v**= (-3,-2,4).
28. Utilizá el producto cruz para encontrar el seno del ángulo w entre los vectores **u** = 2i +j -k y **v** =-3i -2j +4.
29. Encontrá el área del paralelogramo cuyos vértices se enuncian en los siguientes ítems.

32. $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 4, 0)$ **33.** $(-8, 0, 10)$, $(-3, 2, -6)$, $(5, -5, 0)$

34. $(-2, 1, 0)$; $(1, 4, 2)$; $(-3, 1, 5)$ **35.** $(7, -2, -3)$; $(-4, 1, 6)$; $(5, -2, 3)$

36. $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$ **37.** $(a, b, 0)$; $(a, 0, b)$; $(0, a, b)$

30. Demostrá que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

31. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

    Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (2, 1, -1)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.