SISTEMAS DE ECUACIONES

RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS, INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICAS DE SISTEMAS DE 3 ECUACIONES CON 3 INCÓGNITAS, SISTEMAS HOMOGENEOS

BLOQUE II . UNIDAD 4

Ejercicio resuelto

Resolución por método Gauss-Jordan

8. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Determine las condiciones de a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 = a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 = b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -20 & a \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & 8 & c \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & 8 & c \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ 0 & 1 & -45 & \frac{6}{5}a+b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5}a+c \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea inconsistente $-\frac{2}{5}a + c \neq 0$.

Sistema de ecuaciones para la resolución de situaciones problemáticas

EJEMPLO 1.2.8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Especie 1 1u alimento A, 1u alimento B, 2u alimento C
Especie 2 3u alimento A, 4u alimento B, 5u alimento C
Especie 3 2u alimento A, 1u alimento B, 5u alimento C

25.000u alimento A 20.000u alimento B y 55.000u alimento C

¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Especie 1 1u alimento A, 1u alimento B, 2u alimento C
Especie 2 3u alimento A, 4u alimento B, 5u alimento C
Especie 3 2u alimento A, 1u alimento B, 5u alimento C

25.000u alimento A 20.000u alimento B y 55.000u alimento C

Especie 1: x_1 indicará la cantidad de peces de la especie 1
Especie 2: x_2 indicará la cantidad de peces de la especie 2
Especie 3: x_3 indicará la cantidad de peces de la especie 3

Observando el consumo del alimento A, tenemos:

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento A. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

Utilizando reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 + 5x_3 = 40.000$$
$$x_2 - x_3 = -5.000$$
x_3 , variable libre

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

ACTIVIDAD

Un ebanista fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se requieren 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Son necesarios 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. El centro de lijado está disponible 16 horas a la semana, el de pintura 11 horas a la semana y el de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se utilicen a toda su capacidad?

30 sillas, 30 mesas para café y 20 mesas para comedor.

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

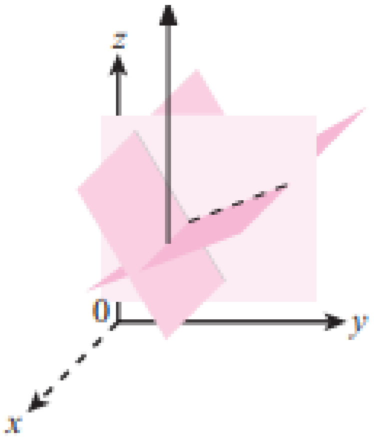

Figura 1.4
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

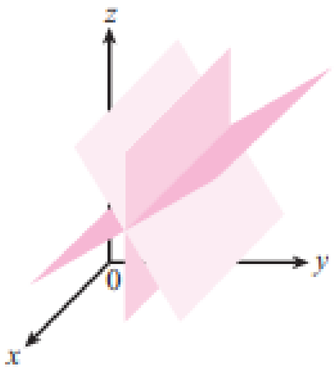

Figura 1.5
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

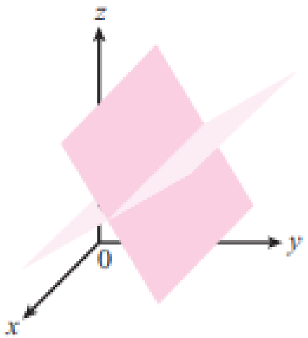

Figura 1.6
Dos planos se intersecan en una recta.

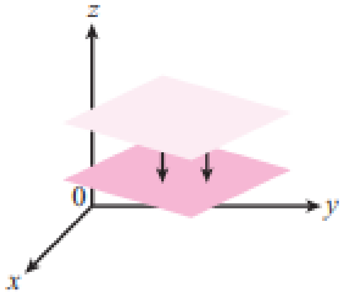

Figura 1.7
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

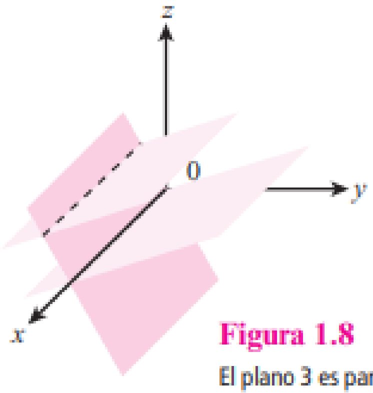

Figura 1.8
El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2.

Cada ecuación en un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es la ecuación de un plano. Cada solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en cada uno de los tres planos. Existen seis posibilidades:

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.4).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.5).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.6).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos, por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.7).
6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.8).

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

Sistemas homogéneos de ecuaciones

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.2.10), página 16] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots b_m$, son cero; si alguna o algunas de las constantes $b_1, \ldots, b_m$ es o son diferentes de cero, decimos que el sistema lineal es **no homogéneo**. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Soluciones triviales y no triviales

Para sistemas generales homogéneos, x1 = x2 = … xn = 0 es siempre una solución (llamada solución trivial o solución cero), por lo que sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman soluciones no triviales.

Veamos algunos ejemplos

EJEMPLO 1.4.1 **Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial**

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.2.1 en la página 8. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 1.4.2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones, y, como tenemos un reglón de ceros, esto nos indica que existe un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 1.4.3 **Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones**

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1.4.2)$$

Solución Al reducir por renglones, utilizando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

En esta ocasión tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que hay un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{-5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3\right)$.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo siempre tendrá un número infinito de soluciones.

Resumen 1.4

- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma (p. 38)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**) (p. 38)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales**. (p. 38)
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$). (p. 40)

I) ¿Cuáles de los siguientes sistemas deben tener soluciones no triviales?

a) $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{array}$$

Tarea: finalizar la resolución del TP N° 4

	Análisis de Sistemas Lógica y Álgebra
	TP Nº 4 "Sistema de Ecuaciones"
	Alumno: Año académico:

Enviarlo al correo: federicostrassera@hotmail.com