SISTEMAS DE ECUACIONES

MÉTODO GAUSS-JORDAN

BLOQUE II . UNIDAD 4

Primeros conceptos

Matriz

Matriz de coeficientes

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 2.1. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1.2.1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

Matriz de $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1.2.1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

Comenzamos a estudiar el método

Lo que está permitido …

Operaciones elementales por renglones

Las tres operaciones elementales por renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales por renglones

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

Simbología

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

Notación

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son **equivalentes**; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Matrices aumentadas equivalentes

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

El sistema tiene única solución:
$(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 3)$

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1.2.1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + \quad 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución $(1, 4, 0)$. Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$, y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

SISTEMA ………

El sistema tiene infinitas soluciones:

$(x_1, x_2, x_3) = (1+t, 4-2t, t)$

Algunas soluciones …

Para t = 1 → (2, 2, 1)

Para t = 2 → (3, 0, 2)

Para t = ½ → (3/2, 3, 1/2)

Para t = -3 → (-2, 10, -3)

Ejercitamos

Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x - z &= 3 \end{aligned}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución

Solución *Paso 1.* La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora transformamos como sigue la matriz del paso 1 a su forma escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la primera fila a la segunda. Se sumó (-3) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se multiplicó la segunda fila por $\left(-\frac{1}{5}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$ Se sumó 6 veces la segunda fila a su tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ La tercera fila se multiplicó por $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-1) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-3) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la segunda fila a su primera fila.

En consecuencia, la matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad (2)$$

en forma escalonada reducida por filas.

El sistema tiene única solución: $(x, y, z) = (2, -1, 3)$

Comenzamos a resolver

el TP N° 4

Puntos 1, 2, 3 y 5.

Universidad Autónoma de Entre Ríos — FCyT	*Análisis de Sistemas Lógica y Álgebra*
	TP Nº 4 "Sistema de Ecuaciones"
	Alumno: Año académico: 2020

1. En los siguientes ejercicios, encuentre las soluciones (si las hay) de los sistemas dados.

a. $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=-8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+ay=c \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x+4y=1 \\ -7x-4y=-3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y=-3 \\ -2x+4y=8 \end{cases}$

2. Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema del ejercicio 1.b. tenga infinitas soluciones.

3. Si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ demuestre que el sistema (1.1.1) tiene una solución única.

4. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material de una taza cuesta 25 euros y el de un plato cuesta 20 euros. Si se asignan 44 euros diarios para la producción de tazas y platos.

   a. ¿Cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8hs, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente 44 euros en materiales?
   b. Resuelva la situación considerando que los materiales ahora cuestan 15 y 10 euros respectivamente y se gastan 24 euros en 8 horas de trabajo.
   c. ¿Cuál es la solución si se gastan 25 euros en 8 hs de trabajo?

5. Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados.

a. $\begin{cases} 9x+9y-7z=6 \\ -7x-z=-10 \\ 9x+6y+8z=45 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 9y-7z=2 \\ -z=-2 \\ -3x+6y+8z=1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x+6y-6z=9 \\ 2x-5y+4z=6 \\ 5x+28y-26z=-8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=7 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -2x-6y-3z=9 \\ -x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} -x+z=0 \\ y+3z=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x+2y-4z=4 \\ -2x-4y+8z=-8 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x+2y-2z-q=1 \\ -3x+4y+z-2q=4 \\ -3x+14y+z-2q=3 \\ 6x+12y-12z-6q=5 \end{cases}$