SISTEMAS DE ECUACIONES

BLOQUE II . UNIDAD 4

¿Dónde quedamos?

LO VISTO

1- PROGRAMA DE CONTENIDOS

BLOQUE I: *Lógica Simbólica. Conjuntos. Relaciones.*

UNIDAD 1: Lógica Simbólica
Proposiciones primitivas. Proposiciones compuestas. Conectivos lógicos: conjunción, disyunción, negación, condicional, bicondicional. Tablas de verdad. Tautología, contradicción, contingencia. Proposiciones recíprocas, contrarias, contrarrecíprocas. Equivalencias. Método de demostración de implicaciones: directo y contrarrecíproco. Leyes lógicas. Funciones proposicionales con una y varias variables. Cuantificadores: universal y existencial. Alcance de los cuantificadores. Negación de proposiciones con cuantificadores.

UNIDAD 2: Conjuntos
Conjuntos. Elementos. Relación de pertenencia. Diagramas de Venn. Igualdad. Inclusión. Cardinal. Conjunto potencia. Operaciones con conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento, diferencia simétrica. Propiedades algebraicas de las operaciones con conjuntos. Principio de adición.

UNIDAD 3: Relaciones
Par ordenado. Conjunto producto o producto cartesiano. Partición. Relaciones. Dominio e imagen. Matriz de una relación. Grafos dirigidos o dígrafos. Propiedades de las relaciones: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva. Relación de equivalencia. Relación de orden.

LO QUE QUEDA POR VER

Unidad 4: Sistema de Ecuaciones Lineales.
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: interpretación geométrica. Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Transformaciones elementales de equivalencia. Forma escalonada reducida. Método de sistemas de ecuaciones: reducción Gauss-Jordan y eliminación Gaussiana. Clasificación de los sistemas. Forma matricial de un sistema. Matrices equivalentes por renglones. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. Matriz inversa. Propiedades. Cálculo de matrices inversas. Matriz transpuesta.

Unidad 5: Vectores y Matrices
Vectores. Vector renglón y columna. Igualdad de vectores. Operaciones: adición, multiplicación por un escalar. Propiedades de las operaciones. Producto interno de dos vectores. Propiedades. Operaciones con matrices: adición, multiplicación por un escalar. Producto de matrices. Propiedades. Potencia de una raíz cuadrada. Matrices triangulares: superior e inferior. Matriz diagonal. Matriz identidad.

Unidad 6: Determinantes
Función determinante. Determinantes de una matriz 2x2 y de 3x3. Menor complementario. Cofactor. Determinante de una matriz nxn. Determinante de una matriz triangular. Propiedades de los determinantes. Matriz de los cofactores. Matriz adjunta. Cálculo de la matriz inversa por el método de la matriz adjunta.

BLOQUE III: *Vectores en el plano y en el espacio. Rectas en el plano y en el espacio*

Unidad 7: Vectores en el plano y el espacio
Coordenadas lineales de un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Segmentos dirigidos. Vectores en el plano: definición geométrica y algebraica. Operaciones y propiedades. Producto interno y proyecciones en el plano. Ángulo entre vectores. Vectores paralelos y ortogonales. Producto interno y proyecciones en el espacio. Producto vectorial. Propiedades. Interpretación geométrica de un módulo. Triple producto escalar. Propiedades. Interpretación geométrica. Aplicaciones. Coplanaridad.

¿Cómo se evaluará?

Para obtener la condición de *regular*, el alumno deberá:

- Contar con el 80% de asistencia a las clases dictadas.
- Aprobar con un mínimo de 6 los dos parciales con aplicaciones de los conocimientos adquiridos.
- Tener entregados los trabajos prácticos solicitados.

Para obtener la condición de *promocionado*, el alumno deberá:

- Contar con el 80% de asistencia a las clases dictadas.
- Aprobar con un promedio de 8 los dos parciales y ninguna evaluación parcial con calificación inferior a 7.
- Tener entregados los trabajos prácticos solicitados.

En caso de no alcanzar ninguna de las dos condiciones detalladas, el alumno quedará en condición de *libre*.

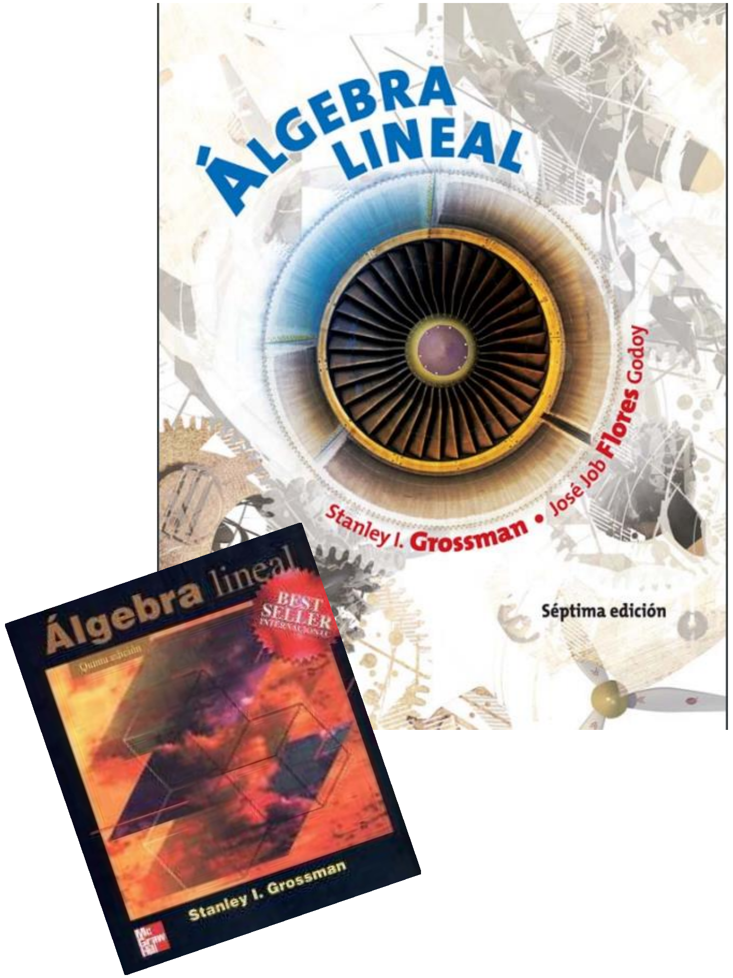
En la evaluación final de la materia se tiene en cuenta que:

- Los alumnos regulares deben aprobar un examen escrito teórico/práctico final.
- Los alumnos libres deben aprobar un examen práctico y uno teórico.

El examen práctico consistirá en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.
El examen teórico constará de definiciones, desarrollos, demostraciones, justificaciones y argumentaciones de los razonamientos, conceptos y teoremas desarrollados en la materia.
Se considera aprobada la evaluación final con una nota mínima de 6.

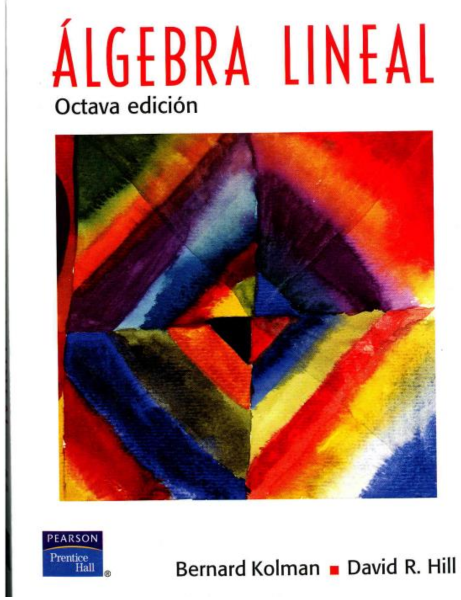
Álgebra

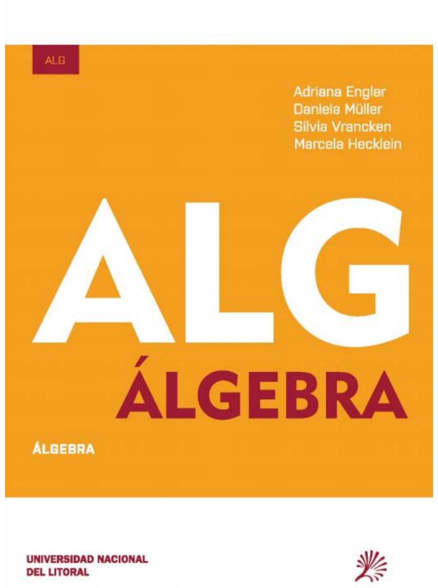
BIBLIOGRAFÍA OBLIGATORIA



Rama de la matemática cuyo objeto de estudio son las estructuras abstractas que operan en patrones fijos, dentro de las cuales suele haber números, operaciones aritméticas y letras, que representan operaciones concretas, variables, incógnitas o coeficientes.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA





Unidad 4: Sistemas de ecuaciones lineales

LO CONOCIDO: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE DOS INCÓGNITAS CON DOS ECUACIONES

EJEMPLO 1.1.1 **Sistema con una solución única**

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 5x + 2y &= 12 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad A, la siguiente ecuación: $8x = 16$ (es decir, $x = 2$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $2y = 12 - 5x = 12 - 10 = 2$, entonces $y = 1$. Así, el par (2, 1) satisface el sistema (1.1.2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (1.1.2) tiene una **solución única**.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

- Sustitución
- Igualación
- Reducción
- Gráfico
- Por determinantes (Regla de Crammer)

…

EJEMPLO 1.1.2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \qquad (1.1.3)$$

Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2, esto está permitido por la propiedad B. Al ser ambas ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (1.1.3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (1.1.3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: $(7, 0)$, $(0, -7)$, $(8, 1)$, $(1, -6)$, $(3, -4)$ y $(-2, -9)$.

RESOLUCIÓN POR MÉTODO DE IGUALACIÓN

1- Despejamos la variable y de ambas ecuaciones

y = -7 + x

y = -7 + x

2- Igualamos

- 7 + x = -7 + x

La expresión es una IDENTIDAD, es decir, tiene solución para cualquier valor de x e y. Por lo tanto, el sistema tiene *infinitas soluciones*.

EJEMPLO 1.1.3 Sistema sin solución

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \qquad (1.1.4)$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por la propiedad B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (1.1.4) **no tiene solución**.

RESOLUCIÓN POR MÉTODO DE DETERMINANTES

1- Calculamos los determinantes D_X , D_Y y D.

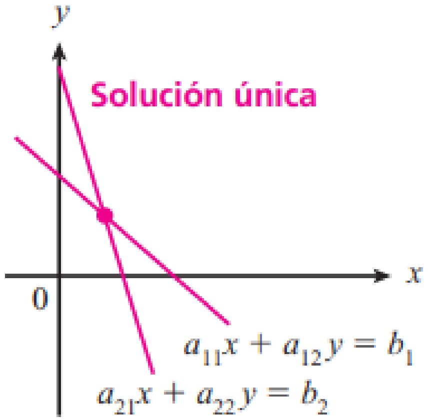
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 13 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 13 = -1 \, , D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 13 \, - 14 = -1, D \quad = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

2- Calculamos D_X /D , D_Y / D

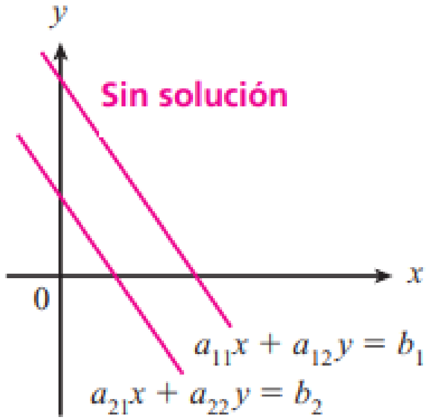
x = D_X /D = -1/0 no tiene solución

Y = D_y /D = -1/0 no tiene solución.

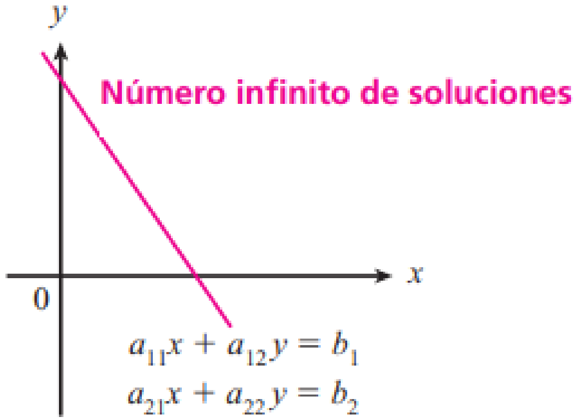
Clasificación



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección



b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección



c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

SISTEMA INCOMPATIBLE

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Generalizamos

Ahora se procederá a resolver el sistema (1.1.1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Se deben analizar los siguientes casos:

Caso I Si $a_{12} = a_{22} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es x.

Caso II Si $a_{11} = a_{21} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es y.

Caso III Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Caso IV Si $a_{22} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_2}{a_{21}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Caso V Si $a_{11} = 0$ y $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_1}{a_{12}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar x.

Caso VI Si $a_{21} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{22}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar x.

Generalizamos

Sistema formal $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}}$$

Caso VII

El último caso necesita un desarrollo más detallado, de modo que consideremos que todos los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son diferentes a cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

Después, si en (1.1.5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

Observe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1.1.1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Generalizamos

Se ha demostrado lo siguiente:

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1.1.1) tiene una **solución única**.

Podemos asegurar entonces que Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene única solución.
¿Qué sucede si es igual a 0?

Teorema 1.1.1 Teorema de resumen (punto de vista 1)

El sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i) Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Actividad

I) De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Su gráfica consiste en el (los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.
d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.
b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.
c) La gráfica de la solución es una recta.
d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III) ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a) El sistema es inconsistente.
b) La solución es $(-1, 2)$.
c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV) De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$
b) $6x - 3y = -15$
c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
d) $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

LO NUEVO: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS n INCÓGNITAS CON n ECUACIONES

EJEMPLO 1.2.1 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única**

Resuelva el sistema

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18\\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24\\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Analizamos la resolución que se propone en Grossman S., Flores J. (2012)

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1.2.1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.1, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \tag{1.2.2a}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \tag{1.2.2b}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \tag{1.2.2c}$$

Como se vio en la sección 1.1, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación equivalente. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (1.2.2) multiplicando ambos lados de la ecuación (1.2.2a) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (1.2.2b). Esto da

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 &=& -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 &=& -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva ecuación (1.2.2b) y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (1.2.2a) se multiplica por -3 y se suma a la ecuación (1.2.2c), lo que da por resultado:

Nota

Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.3}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$
$$-3x_2 - 6x_3 = -12 \qquad \textbf{(1.2.3}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.3}\textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

Observe que en el sistema (1.2.3) se ha eliminado la variable x_1 de las ecuaciones (1.2.3*b*) y (1.2.3*c*). Después se divide la ecuación (1.2.3*b*) por -3:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.4}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.4}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.4}\textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

Se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.4*a*); después se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por 5 y se suma a la ecuación (1.2.4*c*):

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.5}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.5}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$
$$x_3 = -3 \qquad \textbf{(1.2.5}\textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

Ahora se multiplica la ecuación (1.2.5*c*) por -1:

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.6}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.6}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$
$$x_3 = 3 \qquad \textbf{(1.2.6}\textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

Por último, se suma la ecuación (1.2.6c) a la ecuación (1.2.6a) y después se multiplica la ecuación (1.2.6c) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.6b) para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1.2.1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, -2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[3]

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Resumimos los pasos realizados:

i) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii) Se “eliminaron” los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para “eliminar” los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para “eliminar” los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Esta resolución se basó en dos propiedades básicas que utilizaremos a partir de ahora.

Propiedad A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Propiedad B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.