INVERSA DE UNA MATRÍZ

BLOQUE II . UNIDAD 4

ACTIVIDAD

Multiplicar las matrices A y B ¿Qué características tiene la matriz resultante?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante es la matriz IDENTIDAD 2x2, I_2

Definición 2.4.1

Matriz identidad

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal** son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$\boxed{I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}} \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

Nota

La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{AI_n = I_nA = A}$$

La matriz identidad es elemento neutro en la multiplicación de matrices.

Inversa de una matriz

La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.

Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa (ejemplo 2.4.3 de la página 106).

A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Teorema I

Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

-demostración:

Suponga que la matriz A no tiene única inversa.
Suponga que B y C son dos inversas de A.
Se puede demostrar que B = C.
Por definición, como B es inversa de A, se tiene AB = BA = I.
De la misma forma, como C es inversa de A, AC = CA = I.
Por la ley asociativa de la multiplicación de matrices se tiene que:

$$B(AC) = (BA)C$$

Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

$$B = C$$

y el teorema queda demostrado.

Teorema II

Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

-demostración:

Inversa de una matriz

Para probar este resultado es necesaria la definición 2.4.2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ecuación (2.2.6), página 68

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Veamos una relación

Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y suponga que A es invertible. Entonces

$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	se multiplicó el término de la izquierda por A^{-1}
$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$A^{-1}A = I$
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$I\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Teorema 2.4.4 **Solución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de su matriz inversa**

Si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **(2.4.2)**

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Ya que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

Pregunta 1. ¿Qué matrices tienen inversa?

Pregunta 2. Si una matriz tiene inversa ¿cómo se puede calcular?

Aclaración

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

El sistema lineal anterior se puede escribir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

También se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Calculamos la inversa de una matriz (Método del Espejo)

EJEMPLO 2.4.2 Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Para calcular la matriz inversa de una dada, se puede utilizar la reducción por renglones sobre las dos matrices aumentadas al mismo tiempo, considerando la nueva matriz aumentada, la cual está formada por la matriz de coeficientes de A y la matriz identidad de igual tamaño que A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos realizando las operaciones por renglones sobre todo el renglón. Nuestro objetivo es reducir la matriz A a la matriz identidad. En ese proceso, obtendremos, la matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Verificación

Podemos verificar si la matriz calculada es la inversa de la matriz A ¿cómo?
Recurriendo a la definición de matriz inversa

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2.4.3 **Una matriz de 2 × 2 que no es invertible**

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y si es así, calcule su inversa.

Si se aplica la misma lógica que en el ejemplo 2.4.1 se puede escribir este sistema en la forma de matriz aumentada $(A \mid I)$ y reducir por renglones:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Probamos

Actividad

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

- Posibles soluciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/10 & 4/10 \\ -1/10 & 2/10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/10 & 4/10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cálculo de la matriz inversa de una matriz de 3x3

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (vea el ejemplo 1.2.1 en la página 8). Calcule A^{-1} si existe.

Solución Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-4R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+5R_2]{R_1\to R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2-2R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Como A se redujo a I se tiene

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

se factoriza $\frac{1}{6}$ para que los cálculos sean más sencillos.

Verificación

$$A^{-1}A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=I.$$

También se puede verificar que $AA^{-1}=I$.

Algunas relaciones que podemos ir observando …

Teorema 2.4.6

Sea A una matriz de $n \times n$.

i) A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n; esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

ii) A es invertible si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iii) Si A es invertible, entonces la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

iv) A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Tarea: ejercicios del TP N° 5

a realizar: 11, 12, 13.

También se puede probar

resolver 14 y 15

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

11. En los problemas 1 a 12 determina si la matriz dada es invertible. De ser así, calculala.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 48 \\ 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Muestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

13. Muestra que para A y B matrices invertibles de nxn, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

14. De manera análoga, muestra que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}.\ B^{-1}.A^{-1}$

15. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Correo: federicostrassera@hotmail.com