DETERMINANTE

BLOQUE II . UNIDAD 6

Cálculo del determinante en una matriz 2x2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. En la sección 2.4 en la página 107 se definió el determinante de A como

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Con frecuencia se denotará det A por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

Observación

No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Ejemplo:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$|A|$= $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$|A| = 1.3 - (-1).2$
= 3 + 2 = 5

Cálculo del determinante en una matriz 3x3

Determinante de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \qquad (3.1.3)$$

Nota

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3.1.3).

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4((-5)(9) - (6)(1)) - 7((3)(9) - (-8)(1)) + (-2)((3)(6) - (-8)(-5))$$

$$= 4(-51) - 7(35) - 2(-22)$$

$$= -405$$

Método II para el cálculo de matrices de 3x3

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & & & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} & \\ & & + & + & + \end{array}$$

A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto d

Este método no funciona para determinantes de 3x3. Si intenta algo similar para determinantes de 4 x 4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Ejemplo:

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

Solución Si se escribe $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right.$ y se multiplica como lo indican las flechas se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5) \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$

Actividad

Calcular el determinante de la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Una nueva relación entre la resolución de sistemas de ecuaciones, matrices invertibles, determinantes.

Teorema 2.7.4 Teorema de resumen (punto de vista 4)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes ocho afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

1. A es invertible.
2. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
3. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.
4. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.
5. ~~A se puede escribir como el producto de matrices elementales.~~
6. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
7. $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).
8. ~~Existen una matriz de permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la~~ diagonal principal y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA = LU$.

Un nuevo concepto…

Matriz triangular

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Ejemplos

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores;

$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

Veamos una propiedad de las matrices triangulares

Teorema 3.1.1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}} \tag{3.1.9}$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

Otra propiedad más

Teorema 3.1.2

Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.

Demostración

Sea
$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Actividad II

II) ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b?

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d) Los determinantes no se pueden establecer porque no se parecen los valores de a y b.

III) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\det A =$ ____________.

a) 0 *b)* 12 *c)* -12 *d)* 6 *e)* -6

IV) ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Respuestas

II) *b)** **III)** *c)* **IV)** *b), c)*

Del práctico N° 5, actividad 18 (cálculo de determinantes para matrices de 2x2 y 3x3)

DETERMINANTE

18. En los problemas 1 al 16 calcula el determinante. Utiliza las propiedades siempre que sea posible.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ -8 & -8 & 10 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$