# SISTEMAS DE ECUACIONES

MÉTODO GAUSSEANO
MATRICES ESCALONADAS POR RENGLONES Y ESCALONADAS REDUCIDAS POR RENGLONES

BLOQUE II . UNIDAD 4

# Ejercicios resueltos

Resolución por método Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 9x + 9y - 7z = 6 \\ -7x - z = -10 \\ 9x + 6y + 8z = 45 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & -7 & 6 \\ -7 & 0 & -1 & -10 \\ 9 & 6 & 8 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7/9 & 2/3 \\ -7 & 0 & -1 & -10 \\ 9 & 6 & 8 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7/9 & 2/3 \\ 0 & 7 & -58/9 & -16/3 \\ 9 & 6 & 8 & 45 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7/9 & 2/3 \\ 0 & 7 & -58/9 & -16/3 \\ 0 & -3 & 15 & 39 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7/9 & 2/3 \\ 0 & 1 & -58/63 & -16/21 \\ 0 & -3 & 15 & 39 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & -58/63 & -16/21 \\ 0 & -3 & 15 & 39 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & -58/63 & -16/21 \\ 0 & 0 & 257/21 & 257/7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & -58/63 & -16/21 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/7 & 10/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Única solución} \\ (x, y, z) = (1, 2, 3) \\ \text{S.C.D.} \end{array}$$

# Ejercicios resueltos

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 4 \\ -2x - 4y + 8z = -8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y - 4z = 4$

$y = t_1$ | variables libres

$z = t_2$

$x = 4 - 2y + 4z$

$x = 4 - 2t_1 + 4t_2$

$(x, y, z) = (4 - 2t_1 + 4t_2,\ t_1,\ t_2)$

infinitas soluciones

S.C.I

# Ejercicios resueltos

c) $\begin{cases} 3x + 6y - 6z = 9 \\ 2x - 5y + 4z = 6 \\ 5x + 28y - 26z = -8 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ 5 & 28 & -26 & -8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ 5 & 28 & -26 & -8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 5 & 28 & -26 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & -23 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & -23 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/9 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right)$$

$0x + 0y + 0z = -23$

$0 = -23$ no es posible

El sistema no tiene solución S.I.

## EJEMPLO 1.2.6 Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana

Resuelva el sistema del ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

### Solución

Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número $(-5)$ que está debajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero $x_2$ y después $x_1$. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1x + 2y + 3z = 9 \\ 1y + 2z = 4 \\ 1z = 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} x + 2\cdot(-2) + 3\cdot(3) = 9 & x = 4 \\ y + 2\,3 = 4 & y = -2 \end{array}$$

$(x, y, z) = (4, -2, 3)$ Única solución S.C.D.

# Diferenciamos los métodos

ELIMINACIÓN GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

**i) Eliminación de Gauss-Jordan**

Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 10.

**ii) Eliminación gaussiana**

Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende; al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales por renglones. De hecho, como se verá en el apéndice C, para resolver un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $\frac{n^3}{2}$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $\frac{n^3}{3}$ sumas y multiplicaciones.

## Forma escalonada reducida por renglones

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

**i)** Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

**ii)** El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

**iii)** Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

**iv)** Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

**Nota**

La condición iii ) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

## Forma escalonada reducida por renglones

**EJEMPLO 1.2.4** **Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones**

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iv)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Forma escalonada por renglones

**Forma escalonada por renglones**

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones i), ii) y iii) de la definición 1.2.2.

**EJEMPLO 1.2.5** **Cinco matrices en la forma escalonada por renglones**

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iv)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### EJEMPLO 1.2.7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 5x_3 + \phantom{4}x_4 &= 4 \\
2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

**Solución** Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)
$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables $x_3$ y $x_4$ se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas, es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de “redondeo”. Este problema se analiza en el apéndice C.

# Comenzamos a resolver

# el TP N° 4

Puntos 6, 7, 8 y 9.

| Análisis de Sistemas Lógica y Álgebra | |
|---|---|
| TP Nº 4 "Sistema de Ecuaciones" | |
| Alumno: | Año académico: 2020 |

7. En las siguientes matrices, utilice las operaciones elementales con renglones para reducirlas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

**40.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

**43.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

**46.** $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -14 & -1 \end{pmatrix}$

8. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Determine las condiciones de a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

9. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$

10. Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías, Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald`s, y que hace 2 días su valor bajó $350 pero que ayer aumentó $600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones Delta Airlines bajó $1 por acción y el de las Hilton Hotels bajaron $1,50 pero que el precio de las acciones de McDonald`s subió $0,50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió $1,50, el de las Hilton Hotels bajó otros $0,50 y las de McDonald`s subieron $1. Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de McDonald`s, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y en Hilton.