VECTORES Y MATRICES

OPERACIONES CON VECTORES Y MATRICES

BLOQUE II . UNIDAD 5

En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.2 En el capítulo anterior, se describió la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como un par de números (x, y) y para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas una posible terna solución es (4, 22, 3). Tanto (x, y) como (4, 22, 3) son vectores.

Definición 2.1.1

Vector renglón de *n* componentes

Un vector de n componentes se define como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.1.1)$$

Definición 2.1.2

Vector columna de *n* componentes

Un **vector columna de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2.1.2)$$

Ejemplos

iii) $(2, -1, 0, 4)$ es un vector renglón (o un vector de dimensión 4)

iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero

Más aclaraciones

Los vectores se denotan con letras minúsculas negritas como **u**, **v**, **a**, **b**, **c**, y así sucesivamente. Un vector cero se denota por **0**. Más aún, como en términos generales resultará obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como "*vectores*".

x_1 se denomina la primera componente del vector, x_2 es la segunda componente, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la k-ésima componente del vector.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Observación

Se puede observar aquí por qué el orden en que se escriben las componentes de un vector es sumamente importante. Es evidente que los vectores $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ tienen significados muy distintos para el comprador.

Recordemos

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

encuentre las componentes a_{12}, a_{31} y a_{22}.

Definición 2.1.5

Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.3)$$

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$ se llama **renglón i** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se llama **columna j**. La **componente o elemento ij** de A, denotado

IGUALDAD Y SUMA DE MATRICES

Definición 2.1.6

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si

1) son del mismo tamaño y
2) las componentes correspondientes son iguales.

ii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

¿Son iguales estas matrices?

Definición 2.1.7

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Advertencia

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ o las matrices (vectores) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es decir, son incompatibles bajo la suma.

Multiplicación de una matriz/vector por un escalar

Definición 2.1.8

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.5)$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 2.1.6 Múltiplos escalares de matrices

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$$-\tfrac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2.1.7 Suma de múltiplos escalares de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Solución

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Actividad

I) ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2.

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2 \;\; 0 \;\; 0)$ y $B = (3 \;\; 1)$?

a) $(-8 \quad -4)$
b) $(5 \quad 0 \quad 1)$
c) $(16 \quad -4 \quad 0)$
d) Esta operación no se puede realizar.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesaria cuando se encuentra la diferencia (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.
b) Las matrices deben ser cuadradas.
c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.
d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV) ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$ *b*) $4, -8$
c) $2, 8, -1$ *d*) $-4, 8$

V) ¿Cuál de las siguientes opciones debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

a) $-3, 2, 6$ *b*) $0, -2, 9$
c) $3, -2, 6$ *d*) $0, 2, -9$

Actividad

I) ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2.

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2 \;\; 0 \;\; 0)$ y $B = (3 \;\; 1)$?

a) $(-8 \quad -4)$
b) $(5 \quad 0 \quad 1)$
c) $(16 \quad -4 \quad 0)$
d) Esta operación no se puede realizar.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesaria cuando se encuentra la diferencia (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.
b) Las matrices deben ser cuadradas.
c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.
d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV) ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$ *b*) $4, -8$
c) $2, 8, -1$ *d*) $-4, 8$

V) ¿Cuál de las siguientes opciones debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

a) $-3, 2, 6$ *b*) $0, -2, 9$
c) $3, -2, 6$ *d*) $0, 2, -9$

Respuestas a la autoevaluación

I) *b*) II) *d*) III) *a*) IV) *b*) V) *b*)

Producto vectorial

Definición 2.2.1

Producto escalar

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de **a** y **b** denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (2.2.1)$$

Debido a la notación en (2.2.1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos vectores de dimensión n es un escalar (es decir, es un número).

¡El producto punto de vectores es un número (no un vector)!

EJEMPLO 2.2.2 Producto escalar de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-4)(3) + (-2)(-2) + (3)(-5) = -12 + 4 - 15 = -23.$

EJEMPLO 2.2.3 Producto escalar de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = (2, -5, 4, -6)$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución Aquí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(1) + (-5)(0) + (4)(-7) + (-6)(3) = 2 + 0 - 28 - 18 = -44.$

Teorema

Teorema 2.2.1

Sean **a**, **b** y **c** tres vectores de dimensión n y sea α un escalar. Entonces

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$

ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (ley conmutativa del producto escalar)

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (ley distributiva del producto escalar)

iv) $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0+0+0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4-4-12 = -20 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -4-4-12 = -20$$

Producto de matrices

Definición 2.2.2

Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)} \quad (2.2.3)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} \quad (2.2.4)$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

Dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Qué matrices se pueden multiplicar?

EJEMPLO 2.2.4 **Producto de dos matrices de 2 × 2**

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

Reescribiendo las matrices se tiene

$$\begin{array}{c} \\ \text{1er. renglón de } A \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{1a. columna de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Así,

$$c_{11} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 + 15 = 18$$

De manera similar, para calcular c_{12} se tiene

$$\begin{array}{c} \\ \text{1er. renglón de } A \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{2a. columna de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

y

$$c_{12} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 + 18 = 16$$

Siguiendo el procedimiento se encuentra que

$$c_{21} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 20 = 14$$

y

$$c_{22} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 24 = 28$$

Entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Antes de comenzar, conviene determinar el orden de la matriz resultante. En este caso, A es una matriz de 2 x 2 y B es una matriz de 2 x 2, entonces C = AB = (2 x 2) x (2 x 2) también es una matriz de 2 x 2.

Ejemplo 2

EJEMPLO 2.2.5 **El producto de una matriz de 2 × 3 y una de 3 × 4 está definido pero el producto de una matriz 3 × 4 y una de 2 × 3 no lo está**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

$$c_{11} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \qquad c_{12} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{13} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad c_{14} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 \qquad c_{22} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{23} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26 \qquad c_{24} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto BA no está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos).

¿Se puede resolver esta multiplicación? A es una matriz de 2 x 3 y B es una matriz de 3 x 4. Por lo que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Por lo tanto, el producto AB está definido y es una matriz de 2 x 4

Actividad

Resolver, de ser posible las siguientes multiplicaciones entre matrices.

1 $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

¿Qué propiedades se verifican en la multiplicación de matrices?

Teorema 2.2.2 Ley asociativa de la multiplicación de matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \qquad (2.2.5)$$

Teorema 2.2.3 Leyes distributivas de la multiplicación de matrices

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC} \qquad (2.2.7)$$

y

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC} \qquad (2.2.8)$$

¿Qué sucede con la ley conmutativa? ¿Es válida?

Probamos: realizar, de ser posible A.B y B.A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tarea: ejercicios del TP N° 5 a realizar: 3, 4, 5 y 6.

Análisis de Sistemas Lógica y Álgebra	
TP Nº 5 "Matrices y Determinantes"	
Alumno:	Año académico:

Cada vez que se utiliza una cantidad considerable de datos se hace necesario organizarlos de manera que se puedan manejar e identificar sin dificultad. Una manera de lograrlo es escribir los datos en forma tabular, de esta forma adquieren significado y se pueden manipular de manera muy simple y ágil. Esta disposición de los datos corresponde a las matrices. Arthur Cayley introdujo las matrices y tuvo la capacidad de ver y descubrir que esas cajas numéricas se podían considerar como un nuevo tipo de objetos matemáticos. Interpretó que si podía dar definiciones apropiadas para la suma y la multiplicación lograría crear un nuevo sistema matemático como modelo para muchas aplicaciones en las ciencias sociales, naturales y la economía. En este trabajo práctico, estudiaremos cómo funcionan estos objetos bajo las operaciones elementales. Al mismo tiempo calcularemos matrices inversas, que junto con el cálculo de determinantes, nos permitirán establecer conexiones con las unidades ya trabajadas.

OPERACIONES CON MATRICES

1. Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})$ de 3x2 que cumple:

   $a_{ij} = 1$ si $i = j$

   $a_{ij} = -1$ si $i \neq j$

2. Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})$ de 3x3 que cumple:

   $a_{ij} = 0$ si $i < j$ $a_{ij} = -1$ si $i \geq j$

3. Realiza las operaciones indicadas con $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

   a. 3A   b. -7A+2C   c. $C^t - A^t - B^t$

   d. 6B-7A+0C   e. B- (2A+C)   f. -3B+4C

   g. Encuentra una matriz D tal que 2A+B-D es la matriz cero de 2x3.

   h. Encuentra una matriz G tal que A+B+G es la matriz de 2x3 con todos sus elementos iguales a 1.

4. ¿Son iguales las matrices? Justifica.

   a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3+1 & 1-2 & 5+1 \\ -2 & 1+2 & 3-3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifica que si bien A.B = A.C, B y C no son iguales, es decir, el producto de matrices no es cancelativo.

6. En los problemas 23 a 28, realiza los cálculos indicados.

Correo: federicostrassera@hotmail.com