Teoría de conjuntos. Parte II

Unión, intersección, diferencia, complemento y diferencia simétrica de conjuntos. Propiedades

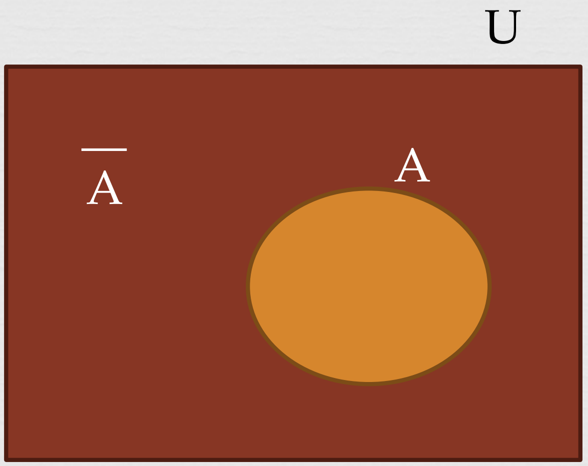
Operaciones con conjuntos

- COMPLEMENTO

El conjunto complemento de A, es el conjunto formado por todos los elementos del universal que no pertenecen a A.

Lo simbolizamos:

$$\overline{A} = \{x \in U / x \notin A\}$$



Operaciones con conjuntos

UNIÓN

Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, **la unión de A y B,** que denotamos **$A \cup B$**, es **el conjunto** formado por todos los elementos del universal que pertenecen a **A , o a B, o a ambos.**

Simbólicamente

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$$

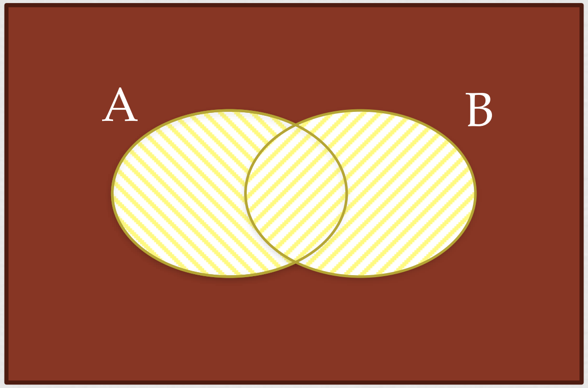
Es decir

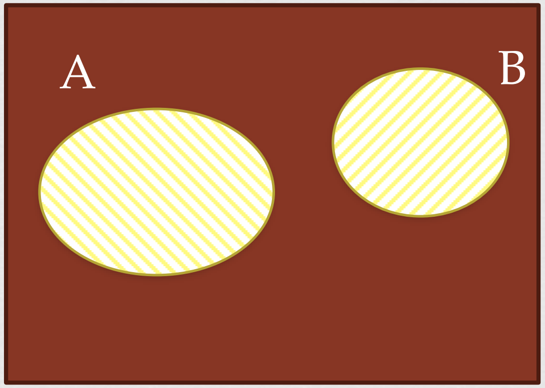
$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$$

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la disyunción de las funciones proposicionales A(x) y B(x).

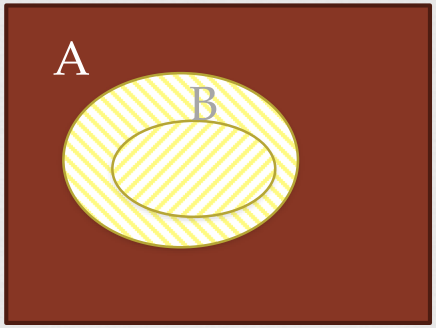
Operaciones con conjuntos

- Gráficamente:





$A \cup B$



Operaciones con conjuntos

INTERSECCIÓN

Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, la intersección de A y B, que denotamos $A \cap B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B.

Simbólicamente:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

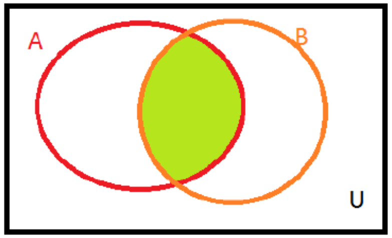
Es decir

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$$

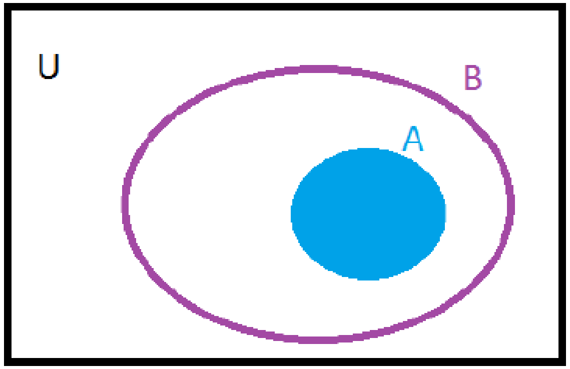
La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la conjunción de las funciones proposicionales A(x) y B(x).

Operaciones con conjuntos

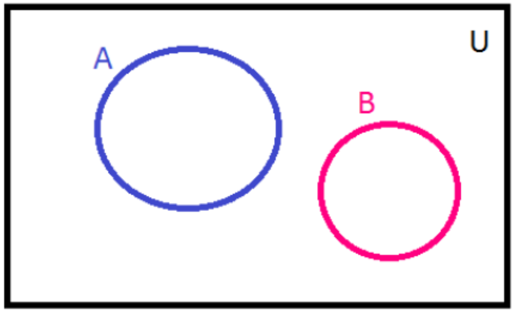
- Gráficamente:



$A \cap B$



$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$



A y B son **disjuntos** ya que $A \cap B = \emptyset$

Operaciones con conjuntos

- Ejemplo

Sean U= $\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x < 3\}$; A= $\{x/x \in U \wedge |x| \geq 2\}$ y B= $\{x/x \in U \wedge |x+1| < 3\}$.

Establecer A∪ B ; $\bar{A} \cup \bar{B}$ y $A \cap B$

Operaciones con conjuntos

Ejemplo

$U = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x < 3\} = \{-5; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$A = \{x / x \in U \wedge |x| \geq 2\} = \{-5, -4, -3, -2, 2\}$ $\bar{A} = \{-1, 0, 1\}$

$B = \{x / x \in U \wedge |x+1| < 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ $\bar{B} = \{-5, -4, 2\}$

- $A \cup B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} = U$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \{-5, -4, -1, 0, 1, 2\}$
- $A \cap B = \{-3, -2\}$

Operaciones con conjuntos

- Ejemplo

Sean A= $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 5\}$
y B= $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge |x-1| < 2\}$.

Establecer A∪ B ; $A \cap B$ $A^c \cup B^c$

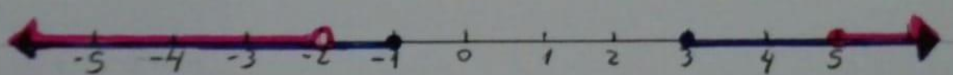
Operaciones con conjunto

Ejemplo

$U = \mathbb{R}$ $\quad A = [-2; 5)$ $\quad B = (-1; 3)$

- $A \cup B = [-2; 5)$
- $A \cap B = (-1; 3)$
- $A^c = \bar{A} = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$ $\quad B^c = \bar{B} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

$A^c \cup B^c = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) = B^c$



$A^c \cap B^c = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty) = A^c$ → Esto sucede porque $B \subset A$. No siempre se cumple que $A^c \cap B^c = A^c$

Operaciones con conjuntos

- Diferencia (o complemento relativo)

Dados los conjuntos $A \subset U$ y $B \subset U$ se llama **diferencia de A y B**, y lo denotamos **A - B**, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Simbólicamente:

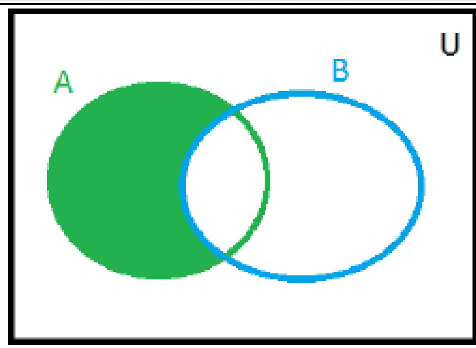
$$A - B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Es decir:

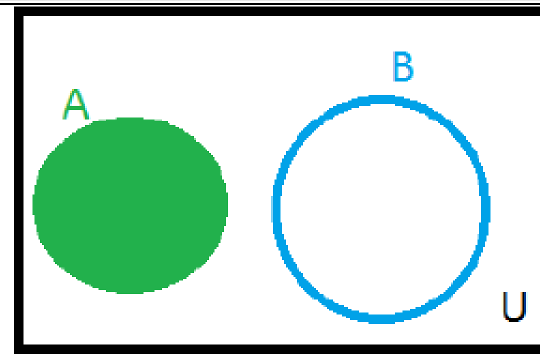
$$x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la conjunción entre A(x) y la negación de B(x).

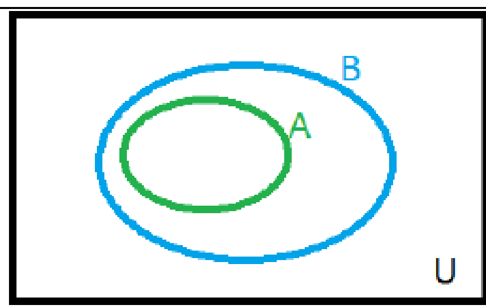
Operaciones con conjuntos



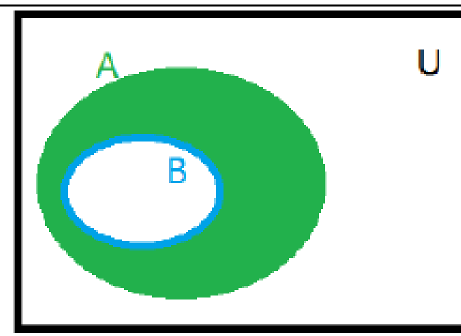
A-B



Si A y B son disjuntos: **A-B =A**



$A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$



A-B

Aclaración

Un diagrama de Venn es simplemente una representación gráfica de una tabla de pertenencia, sin embargo, al igual que las tablas de pertenencias, ninguna de estas técnicas explica la lógica y el razonamiento desplegado en los argumentos de pertenencia ya presentados.

Esto significa que el argumento de pertenencia es más riguroso que otras técnicas y es el argumento preferido para demostrar resultados en la teoría de conjuntos.

Operaciones con conjuntos

Diferencia simétrica

Se llama **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por los elementos que **pertenecen al conjunto A o al conjunto B, pero no a ambos** a la vez.

Es decir que **la diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto **unión de las diferencias (A-B) y (B-A).**

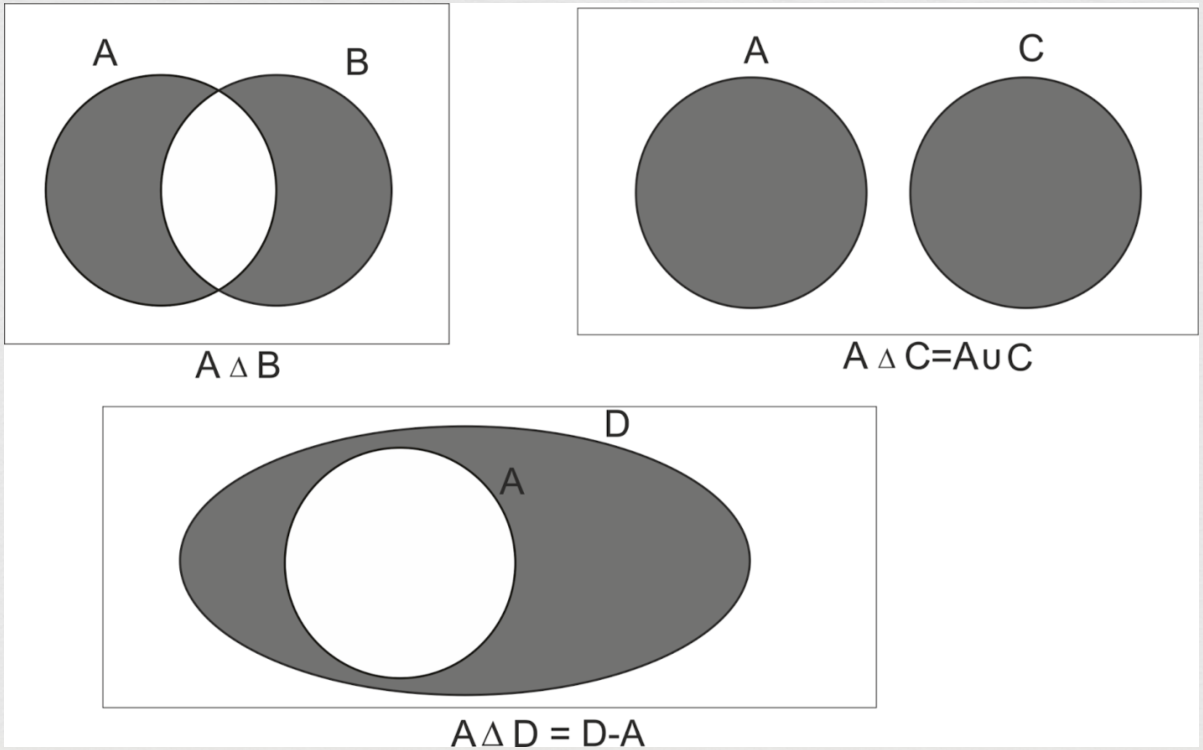
En símbolos:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \qquad o\ bien \qquad A \Delta B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \veebar x \in B\}$$

La diferencia simétrica de los conjuntos A y B es el conjunto de verdad de la disyunción exclusiva (diferencia simétrica) entre las funciones proposicionales A(x) y B(x).

Operaciones con conjuntos

- Gráficamente:



Veamos algunas variantes del ejercicio 8 del T.P. N° 2

Dado los conjuntos K= {2, 4, 6, 8}; L={x/x $\in N \wedge x \leq 4$}; M ={3, 4, 5, 6, 8} y
U = {x/x $\in Z^{+} \wedge x < 11$}. Determine lo que se indica:

$M\Delta K = \{2, 3, 5\}$

$(M\Delta K) \cup K = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$M-(M\Delta K) = \{2, 4, 6, 8\}$

propiedades de las operaciones con conjuntos

Para cualesquiera conjuntos A, B y C tomados de un universo U:	
1) $\bar{\bar{A}} = A$	Ley del doble complemento
2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad o \quad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	Ley De Morgan
3) $\mathrm{A} \cup B = B \cup A$ o $A \cap B = B \cap A$	Propiedades conmutativas
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Propiedades asociativas
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Propiedades distributivas
6) $A \cup A = A$ o $A \cap A = A$	Propiedades idempotentes
7) $A \cup \emptyset = A$ o $A \cap \mathcal{U} = A$	Propiedades del neutro
8) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ o $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$	Propiedades del inverso
9) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ o $A \cap \emptyset = \emptyset$	Propiedades de dominación
10) $A \cup (A \cap B) = A$ o $A \cap (A \cup B) = A$	Propiedades de absorción

Propiedades

- Demostremos algunas de estas propiedades con las técnicas vistas hasta el momento.

1) Ley del doble complemento

$$\bar{\bar{A}} = A$$

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
0	1	0
1	0	1

Puesto que las columnas son idénticas, concluimos que $\bar{\bar{A}} = A$

Propiedades de las operaciones con conjuntos

2) Leyes de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Sea x ∈ $\mathcal{U} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$ (Por definición de complemento)

$\Rightarrow x \notin A\ y\ x \notin B$ (ley De Morgan para la disyunción)

$\Rightarrow x \in \bar{A}\ y\ x \in \bar{B}$ (Por definición de complemento)

$\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (Por definición de intersección de dos conjuntos $\bar{A}\ y\ \bar{B}$)

Propiedades de las operaciones con conjuntos

Ahora que disponemos de las leyes de la teoría de conjuntos, ¿qué podemos hacer con ellas? Analicemos el siguiente ejemplo en el que resulta necesario utilizar las leyes para simplificar una complicada expresión con conjuntos obteniendo así una expresión equivalente simplificada.

Ejemplo 3.18 (Grimaldi R., 1998, Pág. 165)

Simplifique la expresión $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$

Simplifique la expresión $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$

	Razones
$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$	
$= \overline{\overline{((A \cup B) \cap C)}} \cap \overline{\overline{B}}$	Ley de De Morgan
$= ((A \cup B) \cap C) \cap B$	Ley del doble complemento
$= (A \cup B) \cap (C \cap B)$	Propiedad asociativa de la intersección
$= (A \cup B) \cap (B \cap C)$	Propiedad conmutativa de la intersección
$= [(A \cup B) \cap B] \cap C$	Propiedad asociativa de la intersección
$= B \cap C$	Ley de absorción

$\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$

$q \wedge r$

Podemos ver que resolver éstas operaciones con conjuntos resulta equivalente a simplificar la proposición lógica asociada.

Para cualesquiera conjuntos A, B y C tomados de un universo U:	
1) $\overline{\overline{A}} = A$	**Ley del doble complemento**
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **o** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	**Ley De Morgan**
3) $A \cup B = B \cup A$ **o** $A \cap B = B \cap A$	**Propiedades conmutativas**
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**Propiedades asociativas**
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Propiedades distributivas
6) $A \cup A = A$ o $A \cap A = A$	Propiedades idempotentes
7) $A \cup \emptyset = A$ o $A \cap \mathcal{U} = A$	Propiedades del neutro
8) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ o $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$	Propiedades del inverso
9) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ o $A \cap \emptyset = \emptyset$	Propiedades de dominación
10) $A \cup (A \cap B) = A$ **o** $A \cap (A \cup B) = A$	**Propiedades de absorción**

Problemas de conteo

Veamos con atención el siguiente problema:

De los 40 alumnos de una comisión de Licenciatura en Administración, 18 se inscribieron para el torneo de fútbol y 15 para el de hándbol. Además, se sabe que 9 alumnos juegan hándbol y no fútbol.

a) ¿Cuántos alumnos se anotaron para los dos campeonatos?

b) ¿Cuántos no se inscribieron para ninguno?

c) ¿Cuántos se inscribieron solamente para el campeonato de fútbol?

Si llamamos F al conjunto de alumnos que se inscribieron para futbol, H quienes se inscribieron para jugar handbol y U la cantidad de alumnos en total… ¿Qué debemos calcular en cada uno de los ítems pedidos?

Dato: Los diagramas de Venn pueden adaptarse para ayudar a plantear y resolver este tipo de problemas.

Problemas de conteo

Resolución

Datos: $|F|=18$ $|U| = 40$ $|H|=15$ $|H-F|=9$

Debemos averiguar:

a. $|F \cap H|$
b. $|(F \cup H)^c|$
c. $|F-H|$

Veamos con atención el siguiente problema:

De los 40 alumnos de una comisión de Licenciatura en Administración, 18 se inscribieron para el torneo de fútbol y 15 para el de hándbol. Además, se sabe que 9 alumnos juegan hándbol y no fútbol.

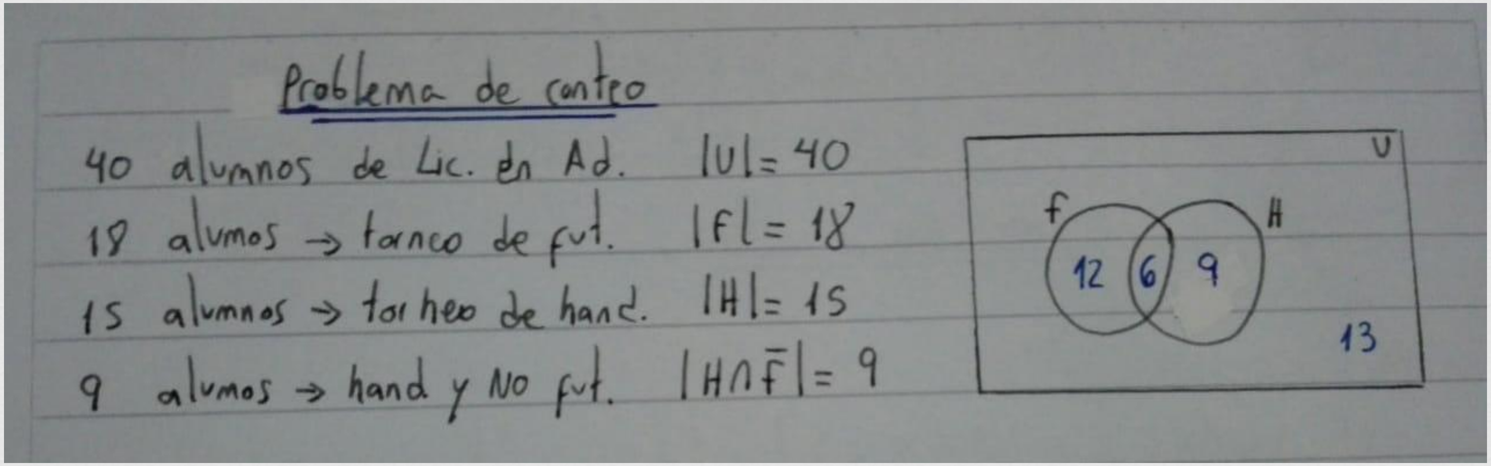
a) ¿Cuántos alumnos se anotaron para los dos campeonatos?

b) ¿Cuántos no se inscribieron para ninguno?

c) ¿Cuántos se inscribieron solamente para el campeonato de fútbol?

Problemas de conteo

Resolución



Problema de conteo

40 alumnos de Lic. en Ad. $|U| = 40$

18 alumos → torneo de fut. $|F| = 18$

15 alumnos → torneo de hand. $|H| = 15$

9 alumos → hand y No fut. $|H \cap \bar{F}| = 9$

Problemas de conteo

Resolución

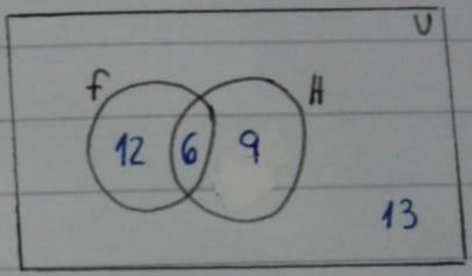
Problema de conteo

40 alumnos de Lic. en Ad. $|U| = 40$

18 alumos → torneo de fut. $|F| = 18$

15 alumnos → torneo de hand. $|H| = 15$

9 alumos → hand y No fut. $|H \cap \bar{F}| = 9$



a) 6 alumnos se anotaron p/ los 2 torneos.

b) 13 alumnos no se inscribieron a ninguno.

c) 12 alumnos se inscribieron solo a futbol.

Problemas de conteo

Para seguir ejercitando…

Una agencia de turismo convocó a un concurso para administradores con conocimientos de algún idioma extranjero. De los que se presentaron, 25 saben Inglés; 21 Francés; y 17 Alemán. Además: 17 saben Inglés y Francés; 14 Inglés y Alemán; 11 Francés y Alemán; y 9 Inglés, Francés y Alemán. ¿Cuántas personas se presentaron al concurso?

Problemas de conteo

Resolución

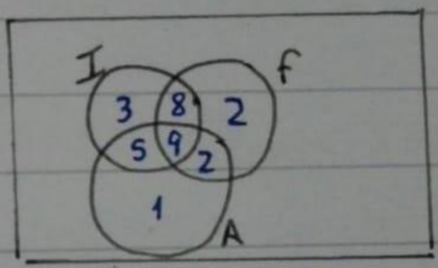
$|I| = 25$ $|f| = 21$ $|A| = 17$

$|I \cap f| = 17$ $|I \cap A| = 14$ $|f \cap A| = 11$ $|I \cap f \cap A| = 9$

① $3 + 8 + 5 + 9 + 2 + 2 + 1 = 30$

② $25 + 21 + 17 - 17 - 14 - 11 + 9 = 30$

Se presentaron 30 personas.



Una agencia de turismo convocó a un concurso para administradores con conocimientos de algún idioma extranjero. De los que se presentaron, 25 saben Inglés; 21 Francés; y 17 Alemán. Además: 17 saben Inglés y Francés; 14 Inglés y Alemán; 11 Francés y Alemán; y 9 Inglés, Francés y Alemán. ¿Cuántas personas se presentaron al concurso?

$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

Algunos ejercicios del TP N° 2

11. Suponga que los conjuntos A, B y C son cualesquiera, U el conjunto universal y ∅ el conjunto vacío. Simplifique las expresiones dadas:

a. $(A \cap U) \cup \emptyset$

Recurrir a las propiedades presentes en este PP o en la hoja de fórmulas

➢ ***Teoría de Conjuntos***

Operaciones	$A \cup B$ (unión de A y B)	$A \cap B$ (intersección de A y B)	A – B (diferencia de A y B)	$\bar{A}$ (complemento de A)	$A \triangle B$ (diferencia simétrica de A y B)

Leyes y Propiedades				
	Ley del doble complemento $\bar{\bar{A}} = A$	Ley De Morgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	Prop. Conmutativa $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Prop. Idempotente $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
	Prop. del Neutro $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \mathcal{U} = A$	Prop. del Inverso $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$	Prop. de Dominación $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Prop. de Absorción $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
	Propiedad Asociativa $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		Propiedad Distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

Algunos ejercicios del TP N° 2

12. Si sabemos que un conjunto G es subconjunto de un conjunto A no vacío, determine la veracidad de los enunciados dados.

a. $A \cap G = G$

Analizaremos la veracidad de éstas igualdades en función de la teoría trabajada (definiciones y propiedades). Lo importante en este punto es comenzar a ejercitar buenas justificaciones.