LÓGICA SIMBÓLICA

PARTE 3

- Reglas de Inferencia
- Funciones proposicionales.
- Proposiciones singulares y generales.
- Cuantificadores: existencial y universal.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO VÁLIDO

En matemática interesa el tipo de razonamiento llamado DEDUCTIVO.

Llamamos *razonamiento* a un par ordenado $(\{p_i\}\ ;\ q)$ siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas y *q* una proposición, llamada conclusión; respecto de la cuál se afirma que deriva de las premisas.

Un *razonamiento es deductivo* sii las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si $p_1 ; p_2 ; \ldots ; p_n$ son verdaderas, entonces q es verdadera.

Un *razonamiento deductivo* es *válido* si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. De un razonamiento no se dice que es V o F sino que es válido o no.

REGLAS DE INFERENCIA

Llamamos REGLA DE INFERENCIA a todo esquema válido de razonamiento, independientemente de la V o F de las proposiciones componentes. De este modo, toda regla de inferencia es una *tautología*.

Un *razonamiento deductivo es válido* cuando el condicional, cuyo antecedente es la conjunción de las premisas y el consecuente la conclusión, es tautológico.

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA…

1. Ley del Modus Ponens

Si *p* y *p*→ *q*, entonces *q*.

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Ejemplo:

Pienso
Si pienso → existo

Existo

REGLAS DE INFERENCIA

2. Ley del Modus Tolens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Ejemplo:

Si pienso → existo
No existo

No pienso

La proposición $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es una tautología

REGLAS DE INFERENCIA

3. Ley del Silogismo Hipotético

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$p \rightarrow r$

Ejemplo:

Si pienso → existo
Si existo → respiro

Si pienso → respiro

La proposición $[(p\rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología

REGLAS DE INFERENCIA
ALGUNOS EJEMPLOS PARA ANALIZAR..

El condicional $[(p \rightarrow q) \wedge (q)] \rightarrow p$ ¿es una tautología?

1.
Si pienso → existo
No existo
___
No pienso

2.
Si pienso → existo
No pienso
___
¿No existo?

3.
Si pienso, existo
Existo
___
¿Pienso?

4.
Si pienso → existo
Pienso
___
Existo

MÉTODOS PARA DETERMINAR LA VALIDÉZ DE UN RAZONAMIENTO

MÉTODO POR ANALOGÍA

Justificar la validez del razonamiento:

$p \to q$
$\neg r \to \neg q$
$\neg(\neg p \wedge \neg t)$
$t \to s$
$\neg r$

---

s

$p \to q$
$\neg r \to \neg q$
$\neg(\neg p \wedge \neg t)$
$t \to s$
$\neg r$

---

s

$p \to q$
$q \to r$ (por ser contrarrecíproco)

$p \to r$ (por ley del Silogismo Hipotético)

$p \vee t$ (por ser negación de la conjunción)

Además, la última premisa $\neg r$ es V, por tanto r es F.
Y como $p \to r$ es V, p debe ser F.
Si p es F, para que $p \vee t$ sea verdadera, t debe ser V.
Si t es V, por ley del Modus Ponens resulta s V.

MÉTODOS PARA DETERMINAR LA VALIDÉZ DE UN RAZONAMIENTO

MÉTODO POR TABLAS DE VALORES DE VERDAD

Justificar la validez del razonamiento cuyas premisas son:

Hoy llueve o hace frío
Hoy llueve o no hace frío

Hoy llueve

En lenguaje simbólico

$p \vee q$
$p \vee \neg q$

---

p

Haciendo la tabla de verdad obtenemos:

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

PROPOSICIONES EQUIVALENTES
Existe una tautología
∴El razonamiento es válido

MÉTODOS PARA DETERMINAR LA VALIDÉZ DE UN RAZONAMIENTO

Si queremos justificar el razonamiento anterior por analogía , ¿cómo podríamos hacerlo?

$$\left.\begin{array}{ll} p \vee q & V \\ p \vee \neg q & V \\ \hline p & \end{array}\right\}$$

$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \rightarrow p$

REGLAS DE INFERENCIA	SIMBOLISMO	REGLAS DE INFERENCIA	SIMBOLISMO
1.Modus Ponens (M.P.)	$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$	6. Dilema Constructivo (D.C.)	$\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$
2. Modus Tollens (M.T.)	$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$	7. Absorción (Abs.)	$\begin{array}{c} p \to q \\ \hline p \to p \wedge q \end{array}$
3. Silogismo Hipotético (S.H.)	$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$	8. Simplificación (Simp.)	$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline p \end{array}$
4. Silogismo Disyuntivo (S.D.)	$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$	9. Adición (Ad.)	$\begin{array}{c} p \\ \hline p \vee q \end{array}$
5. Conjunción (Conj.)	$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$		

FUNCIONES PROPOSICIONALES
SU CUANTIFICACIÓN

Hemos visto el hecho de que los enunciados que contienen una variable como x no necesariamente son proposiciones. Por ejemplo, la frase:

"el número x+2 es un entero par"

No necesariamente es una oración verdadera o falsa. No obstante, cuando un entero par sustituye a x, la proposición resultante es verdadera.

Nos referiremos a la frase "El número x+2 es un entero par" como una proposición abierta.

Definición 2.5:

Una frase declarativa es una proposición abierta si:

1. Contiene una o más variables;
2. No es una proposición;
3. Se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por ciertas opciones permisibles.

FUNCIONES PROPOSICIONALES

SU CUANTIFICACIÓN

Al tratar las proposiciones abiertas, usaremos la siguiente notación:
p(x) [o q(x), r(x), entre otras]
Ejemplo:
r(x): "el número x+2 es un entero par".
Las opciones posibles nombradas en la definición reciben el nombre de **universo** o **conjunto**.

Sea la proposición abierta, p(x) : x es impar
El enunciado "x es impar" no es una proposición ¿Por qué?
Sin embargo, para cada asignación dada a x, dicho enunciado es una proposición.

A las proposiciones de este tipo se las llama funciones o esquemas proposicionales

FUNCIONES PROPOSICIONALES

SU CUANTIFICACIÓN

Una función proposicional en una variable o indeterminada x, es entonces, toda oración en la que figura x como sujeto u objeto directo, la cual se convierte en proposición para cada especificación de x.

Algunos ejemplos..

p(-4) : -4 es impar *F*
p(5): 5 es impar *V*

También podemos definir funciones proposicionales con dos variables o indeterminadas:

p(x, y) : "x es divisor de y"

Al igual que en el caso anterior, si x e y son enteros, p (x, y) no es proposición ya que no podemos afirmar la verdad o falsedad del enunciado. Pero para cada par de valores se obtiene un conjunto de proposiciones V o F, dependiendo de los valores asignados a cada variable:

p (-2, 6) : -2 es divisor de 6 *V*
p (12, 6): 12 es divisor de 6 *F*

FUNCIONES PROPOSICIONALES
SU CUANTIFICACIÓN

A partir de **funciones proposicionales**, es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado CUANTIFICACIÓN.

Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos $\forall \boldsymbol{x}$ y $\exists \boldsymbol{x}$, llamados cuantificadores **universal** y **existencial** en x.
Las expresiones:

$$\forall x: p(x) \; - para\ todo\ x\ se\ verifica\ p(x) -$$

$$\exists x / p(x) \; - existe\ x\ tal\ que\ se\ verifica\ p(x) -$$

corresponden a una función proposicional p(x) cuantificada universal, en el primer caso, y existencialmente, en el segundo.

FUNCIONES PROPOSICIONALES
SU CUANTIFICACIÓN

Una función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición.

Retomemos el ejemplo trabajado:
"*Todos los números enteros son impares*"
es una proposición falsa.

Se puede expresar también, como:
"cualquiera sea x, x es impar"
" $\forall x$: *x es impar* "

Si cuantificamos existencialmente la misma función proposicional obtenemos:

$$\text{“}\exists x / x \; es \; impar\text{”}$$

O sea:

"*Existe x tal que x es impar*"
"Existen enteros que son impares"

El valor de verdad en este caso es Verdadero.

NEGACIÓN DE FUNCIONES PROPOSICIONALES CUANTIFICADAS

La negación de la proposición:

"Todos los enteros son impares"

Es:

"No todos los enteros son impares"

Simbólicamente, lo expresamos:

$$\exists x / \neg p(x)$$

Para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial y se niega la función proposicional

NEGACIÓN DE FUNCIONES PROPOSICIONALES

La negación de la proposición:

"Existen enteros que son impares"

Es:

"No existen enteros impares"

Simbólicamente, lo expresamos:

$$\underbrace{\forall x: \neg p(x)}$$

Para negar una función proposicional cuantificada existencialmente se cambia el cuantificador en universal y se niega la función proposicional

NEGACIÓN DE FUNCIONES PROPOSICIONALES

Sea la proposición:

"Todo el que la conoce, la admira"

O lo que es lo mismo:

"Cualquiera que se la persona, si la conoce, entonces la admira"

Simbólicamente, lo expresamos:

$$\forall x \colon p(x) \Longrightarrow q(x)$$

Su negación, quedaría expresada:

$$\exists x /\ p(x) \wedge \sim q(x)$$

Que en palabras, se traduce:

"Hay personas que la conocen y no la admiran"

ACTIVIDAD

Establezca la validez de los siguientes argumentos:

1.
$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim(p \vee r) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow \sim q \\ r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \sim q \rightarrow \sim p \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \sim s \\ \hline \therefore t \end{array}$$