LÓGICA SIMBÓLICA parte 2

Equivalencia. Las leyes de la lógica. Implicación. Proposiciones recíprocas, contrarias y contrarrecíprocas. Métodos de demostración de implicaciones: directo y contrarrecíproco.

EQUIVALENCIA

Definición 2.2

Dos proposiciones p y q son lógicamente equivalentes, y escribimos p $\Leftrightarrow$ q, cuando la proposición p es verdadera (respectivamente falsa) si y solo si la proposición q es verdadera (respectivamente falsa).

Sea la proposición compuesta:

$$(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow \backsim p \vee q$$

Analicemos su equivalencia a partir de la tabla de verdad

0 → proposición falsa
1 → proposición verdadera

p	q	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	$\backsim p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$\therefore\ p \longrightarrow q$ y $\backsim p \vee q$ son equivalentes

LAS LEYES DE LA LÓGICA

Con los conceptos de equivalencia lógica, tautología y contradicción, veamos las propiedades más importantes del álgebra de proposiciones.

Para cualesquiera proposiciones primitivas *p, q* y *r,*	
Involución (o ley de la doble negación)	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
Conmutatividad	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributividad	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Leyes de Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Leyes de Absorción	$\mathrm{p} \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

¿Son equivalentes estas proposiciones? Con los conocimientos que disponés hasta el momento ¿cómo podrías justificarlo?

IMPLICACIONES ASOCIADAS
Proposiciones recíprocas, contrarias y contrarrecíprocas

Sea el condicional $p \Longrightarrow q$ que llamaremos DIRECTO; en conexión con él, se presentan otros tres condicionales obtenidos por permutaciones o negaciones del antecedente y consecuente:

$p \Longrightarrow q$	DIRECTO
$q \Longrightarrow p$	RECÍPROCO
$\backsim p \Longrightarrow \backsim q$	CONTRARIO
$\sim q \Longrightarrow \sim p$	CONTRARECÍPROCO

Veamos la siguiente tabla de valores de verdad…

IMPLICACIONES ASOCIADAS
Proposiciones recíprocas, contrarias y contrarrecíprocas

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim q \to \sim p$	$\sim p \to \sim q$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Observando la tabla ¿qué implicaciones resultan equivalentes?

Conclusiones:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\backsim q \Rightarrow \backsim p)$$
$$(\mathrm{q} \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\backsim p \Rightarrow \backsim q)$$
$$(\mathrm{p} \Rightarrow q) \not\Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$$
$$(\mathrm{p} \Rightarrow q) \not\Leftrightarrow (\backsim p \Rightarrow \backsim q)$$

ACTIVIDAD

En cada caso, enunciar la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca de las implicaciones dadas:

i) Si x es un número natural, entonces x^2 también lo es.
ii) Juan va al lago , entonces María paga las compras de Juan

Analiza luego la veracidad de las implicaciones resultantes.

Método de demostración de implicaciones
DEMOSTRACIONES DIRECTAS E INDIRECTAS

En matemática, y en aquellas disciplinas que utilizan las leyes lógicas para validar una argumentación dada, continuamente se presenta la necesidad de demostrar la verdad de la implicación $p \to q$.

De acuerdo con lo expuesto hasta aquí, se presentan dos métodos que permiten demostrar una implicación:

1) *MÉTODO DIRECTO*
2) *MÉTODO CONTRARRECÍPROCO*

Veamos un ejemplo, para ello necesitaremos rever la definición de número par e impar.

Definición 2.8

Sea n un entero. Decimos que n es par si n es divisible entre 2; es decir, si existe un entero r tal que n=2r. Si n no es par, entonces decimos que n es impar, para este caso existe un entero s tal que n=2s+1

Teorema 2.4
Si m es un número par, entonces m+7 es impar.

- Demostración por Método Directo

Como m es par, se puede expresar como, $m=2a$ para algún entero a. Entonces $m+7= 2a+7= 2a+6+1= 2(a+3)+1$. Como $a+3$ es un entero, por definición 2.8, podemos asegurar que $m+7$ es impar.

- Demostración por Método Contrarrecíproco

Supongamos que $m+7$ no es impar; por lo tanto, es par. Por esta razón, para alguna b, $m+7=2b$ de donde se obtiene que

$m= 2b-7 = 2b-8+1= 2(b-4)+1$ donde $b-4$ es un entero y por definición de número impar, podemos asegurar que m es impar.

Actividad

Dadas las proposiciones primitivas:

p: A es equilátero

q: A es isósceles

Expresa en palabras las siguientes expresiones simbólicas:

$p \rightarrow q$; $q \rightarrow p$; $\neg p \rightarrow \neg q$; $\neg q \rightarrow \neg p$

Analiza la veracidad de cada una de éstas. Justifica en cada caso.

Bibliografía

- GRIMALDI, R. (1998) Matemática Discreta y Combinatoria. 3º edición. Pearson, Prentice Hall. México: Cap. II
- ROJO,A. (1978) Álgebra. El Ateneo. Buenos Aires: Cap. I

Antes de comenzar…

Cuando un matemático desea ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema de lógica. Esto también es cierto para un científico de la computación que desarrolla los algoritmos necesarios para un programa o sistema de programas. La lógica de las matemáticas se aplica, entonces, en una amplia variedad de campos disciplinares dada las virtudes que ésta presenta en la elaboración de argumentos y demostraciones válidas.

En este capitulo veremos a qué llamamos demostraciones convencionales en matemática; qué leyes las rigen y qué clases de demostraciones hay.

Es importante saber que no será posible aplicar las reglas aprendidas de manera automática, dado que el análisis y la interpretación de la situación dada resultará esencial para determinar cuáles de los contenidos aprendidos se ajustan mejor al problema que queremos dar solución.

Actividad

Demostrar, a partir de la elaboración de una tabla de valores de verdad, la equivalencia de las siguientes proposiciones compuestas:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \land (q \longrightarrow p)$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\backsim p \lor q) \land (\backsim q \lor p)$$