LÓGICA SIMBÓLICA

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS. CONECTIVOS LÓGICOS: CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN, NEGACIÓN. TABLAS DE VERDAD. CONDICIONAL. BICONDICIONAL. TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA.

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

En el desarrollo de cualquier teoría, se hacen afirmaciones en forma de oraciones. Tales afirmaciones, llamadas enunciados (o *proposiciones*), son oraciones declarativas verdaderas o falsas, pero no ambas. Para representarlas se utilizan letras minúsculas (como p, q y r).

Ejemplos:

p: Lógica y Algebra es una materia obligatoria para el prime año de la carrera Análisis de Sistemas.

q: Margaret Mitchell escribió Lo que el viento se llevó.

r: 2+3=4.

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

No son consideradas proposiciones expresiones exclamativas:

Qué bonita chica!

Ni tampoco oraciones imperativas:

Levántate y haz tus ejercicios.

Por otra parte, sean las oraciones:

1. Juan ama la música.
2. La música es amada por Juan.

Desde el punto de vista gramatical son diferentes, pero ambas tienen el mismo significado, por tanto son consideradas la misma proposición. Podemos decir entonces que *proposición* es el significado de toda oración declarativa.

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

Los ejemplos vistos hasta aquí corresponden a **proposiciones primitivas** (también llamadas simples), ya que no se pueden descomponerlas en algo más sencillo.

Las **proposiciones compuestas** son aquellas que conformadas por dos o más proposiciones simples.

CONECTIVOS LÓGICOS

Es posible operar proposiciones simples y/o compuestas a partir de ciertos símbolos llamados, conectivos lógicos.

CONECTIVO	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No p
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	p y q
$\vee$	Disyunción o suma lógica	p o q (sentido incluyente)
$\Rightarrow$	Implicación	“p implica q” o “p entonces q”
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	p si solo si q
$\underline{\vee}$	Diferencia simétrica	p o q (en sentido excluyente)

CONECTIVOS LÓGICOS

¿Qué significa operar con proposiciones?

Dadas una o más proposiciones, cuyos valores de verdad se conocen, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad.

1. NEGACIÓN

La negación de la proposición p es la proposición $\sim p$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplos: la negación de..

p: todo hombre es honesto

Es:

$\sim p$: no todo hombre es honesto

O bien:

$\sim p$: no es cierto que todo hombre es honesto

$\sim p$: hay hombres que no son honestos

$\sim p$: existen hombres deshonestos

CONECTIVOS LÓGICOS

2. CONJUNCIÓN

La conjunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \wedge q$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción solo es verdadera si las dos proposiciones lo son.
Ejemplo: si decimos…

p: hace frío

q: está lloviendo

La conjunción:

p∧q es verdadera solo si p y q son verdaderas.

CONEXTIVOS LÓGICOS

3. DISYUNCIÓN

La disyunción de las proposiciones *p* y *q* es la proposición $p \vee q$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por lo tanto la disyunción es falsa solo si ambas proposiciones lo son.
Se dice que la disyunción es incluyente porque se usa en el sentido de "p o q o ambos", es decir, significa: "p y/o q".
Ejemplo:
"Regalo los libros viejos o que no me sirven" es una disyunción compuesto por las proposiciones:
p:_______________________________
q:_______________________________

CONEXTIVOS LÓGICOS

4. IMPLICACIÓN O CONDICIONAL

La implicación de las proposiciones p y q es $p \Rightarrow q$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p es el antecedente y q el consecuente de esta conexión lógica.
Podemos ver entonces que la implicación es falsa solo cuando el antecedente es V y el consecuente F, en los demás casos la implicación es verdadera.
Ejemplo: "Si apruebo el examen entonces te presto el apunte" es la implicación de las proposiciones:

p: ______________________________

q: ______________________________

CONEXTIVOS LÓGICOS

Analicemos un poco más el ejemplo anterior:

Nos interesa inducir la V o F de la implicación $p \Longrightarrow q^*$ en términos de la V o F de las proposiciones p y q.

- Si p es F, es decir no apruebo el examen, quedo librado del mismo y preste o no el apunte la proposición * es V. Es decir, si el antecedente es F, la implicación es V.
- Si p es V, es decir apruebo el examen, q puede ser V o F. Si q es V, presto el apunte, la implicación es verdadera. Si q es F, no presto el apunte, no cumplo con mi compromiso y la proposición * es F.

CONEXTIVOS LÓGICOS

5. DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL

La doble implicación de las proposiciones p y q es $p \Leftrightarrow q$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo: "T es equilátero ⇔ es equiángulo" es la doble implicación de las proposiciones primitivas:
p: T es equilátero
q: T es equiángulo
La doble implicación es verdadera cuando las proposiciones que la componen, p y q, son ambas V o ambas F.

CONEXTIVOS LÓGICOS

6. DIFERENCIA SIMÉTRICA

La diferencia simétrica o disyunción excluyente de las proposiciones *p* y *q* es la proposición $p \veebar q$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La verdad de $p \veebar q$ está caracterizada por la verdad de una y solo una de las proposiciones componentes.

Podemos deducir, además, que $p \veebar q$ es la negación de $p \leftrightarrow q$

Veamos otro ejemplo*

Sean s, t y u las siguientes proposiciones primitivas:

s: Felipe sale a dar un paseo.

t: La luna está brillando.

u: Está nevando.

Expresar en palabras las siguientes proposiciones compuestas:

i) $(t \wedge \backsim u)$

ii) $t \Longrightarrow (\backsim u \Longrightarrow s)$

iii) $\backsim \left(s \Leftrightarrow (u \vee t)\right)$

De manera inversa, dadas las siguientes frases, expresarlas en notación lógica:

i) "Si está nevando y la luna no está brillando, entonces Felipe no saldrá a dar un paseo"

ii) "Está nevando pero aún así, Felipe saldrá a dar un paseo"

* Extraído de Grimaldi R, 1998:54. Ejemplo 2.1

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

Definición 2.1

Una proposición es una tautología si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad para sus proposiciones componentes. Si una proposición compuesta es falsa para todas estas asignaciones, entonces es una contradicción.

Consideremos la proposición: $[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$

Veamos si ésta proposición compuesta es una tautología o no. Para eso construyamos su tabla de valores de verdad

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

p	q	$p \Rightarrow q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p]$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Al observar la tabla de valores vemos que, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes, la proposición compuesta $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ es V. De ahí que tal proposición sea una TAUTOLOGÍA o también denominada LEY LÓGICA.

¿Cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones? Justifica en cada caso.

- Mis maestros hacen que todas las lecciones sean aburridas. ✓ SI
- ¿Lloverá el jueves?
- Todo número real es mayor que 2. ✓ SI
- Existen enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente. ✓ SI
- El número x es un entero.
- Todo hombre es honesto. ✓ SI
- No todo hombre es honesto. ✓ SI