RELACIONES

La segunda vuelta

Propiedades de las relaciones: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva. Relación de equivalencia. Relación de Orden

RELACIONES REFLEXIVAS

Una relación R sobre un conjunto A es reflexiva, si para todo x ϵ A, (x, x)ϵ R.

D(A) para cualquier conjunto A, es una relación reflexiva.
¿Por qué?

¿Lo son las siguientes relaciones?

- $R_2{}^{*} = \{(a,b) \in AxA / a + b \leq 5\}$ = {(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1);(3,2);(4,1)}
- $R_3 = \{(a,b) \in A^2 / a < b\}$ = {(1,2); (1,3); (1,4) ; (2,3); (2,4); (3,4)}
- $R_4 = \{(a,b) \in A^2 / a \leq b\}$ = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4) ; (2,2); (2,3); (2,4); (3,3); (3,4); (4,4)}

*Siendo A = {1, 2, 3, 4}

RELACIONES IRREFLEXIVAS

Una relación R sobre un conjunto A es irreflexiva, si para todo x ϵ A (x, x)∉ R.

EJEMPLO :

¿Cuáles de las siguientes relaciones son irreflexivas?

- R_2 * $= \{(a, b) \in AxA/a + b \leq 5\}$ = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1);(3,2);(4,1)}
- $R_3 = \{(a, b) \in A^2/a < b\}$ = {(1,2); (1,3); (1,4) ; (2,3); (2,4); (3,4)}
- $R_4 = \{(a, b) \in A^2/a \leq b\}$ = {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4) ; (2,2); (2,3); (2,4);

(3,3); (3,4); (4,4)}

*Siendo A = {1, 2, 3, 4}

RELACIÓN SIMÉTRICA

La relación R sobre el conjunto A es simétrica si (x, y)∈R → (y, x)∈R para todos x, y ∈ A

EJEMPLO 7.6

Si A = {1, 2, 3}, tenemos:

- $R_1 = \{(1,2); (2,1); (1,3); (3,1)\}$ es una relación simétrica sobre A ¿por qué? ¿es una relación reflexiva?
- $R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (2,3)\}$ ¿es simétrica sobre A? ¿y reflexiva?
- ¿ y qué pasa con la relación $R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$?

RELACIÓN ASIMÉTRICA

La relación R sobre el conjunto A es asimétrica si $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$ para todos $x, y \in A$

EJEMPLO :

Sea A = {1, 2, 3}, tenemos:

$R_1 = \{(1,2); (1,3); (3,1)\}$ ¿es una relación asimétrica sobre A ?¿Por qué?

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (2,3)\}$ ¿es asimétrica sobre A? ¿E irreflexiva?

Los pares (x, x) no pueden estar, por definición. Las relaciones asimétricas son **irreflexivas** ¿Sucede lo mismo a la inversa?

RELACIÓN ANTISIMÉTRICA

Dada una relación R sobre un conjunto A, R es antisimétrica si para todos a, b ϵ A, (a, b) y (b, a) ϵ R → a = b.

(en este caso, la única forma en que podríamos tener a "relacionado con" b y b "relacionado con" a es cuando a y b son el mismo elemento de A).

EJEMPLO 7.12 (Grimaldi R., 1998, pág. 353)

Para A = {1, 2;, 3}, tenemos:

R_1 = {(1,2), (2,1), (2,3)} no es simétrica ni anti simétrica.

¿Por qué podés asegurarlo?

La simetría no es lo opuesto de la *antisimetría*.

Existen relaciones que son simétricas y antisimétricas al mismo tiempo (como la igualdad), otras que no son simétricas ni antisimétricas (como la relación R_1), otras que son antisimétricas pero no simétricas (como la relación "menor que").

RELACIÓN TRANSITIVA

Para un conjunto A, una relación R sobre A es transitiva si para todos x, y, z ϵA, (x, y), (y, z)ϵR → (x, z)ϵ R

EJEMPLO 7.6

Si A = {1, 2, 3, 4}, tenemos:

$R_1 =$ {(1,2); (2,3); (1,3); (3,1) } ¿es una relación transitiva sobre A?

$R_2 = \{(a,b) \in AxA/a+b \leq 5\}$ ={(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (4,1)}

$R_3 = \{(a,b) \in A^2/a < b\}$ = {(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)}

RELACIÓN DE ORDEN PARCIAL

Dada una relación R sobre un conjunto A, R es un ORDEN PARCIAL , o una relación de orden parcial, si R es <u>reflexiva, antisimétrica y transitiva</u>.

Si A = {1,2, 3, 4}, tenemos:

$R_1 = \{$(1,2); (2,3); (1,3); (3,1) }

$R_2 = \{(a, b) \in A^2 / a \leq b\}$ entonces R_2= {(1,1);(1,2); (1,3); (1,4) ; (2,2); (2,3); (2,4); (3,3); (3,4); (4,4)}

¿Son ambas relaciones de Orden Parcial? ¿Cuál de ellas lo es? ¿Por qué?

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Una RELACIÓN DE EQUIVALENCIA R sobre un conjunto A es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

EJEMPLO 7.16
Si A = {1,2,3}, tenemos:

$R_1 = \{(1,1);\ (2,2);\ (3,3)\}$

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (2,3), (3,2), (3,3)\}\ \ y$

$R_3 = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (2,1);\ (2,2);\ (2,3);\ (3,1);\ (3,2)\ ;(3,3)\}$

Relaciones de Equivalencia sobre A.