RELACIONES

PAR ORDENADO. CONJUNTO PRODUCTO O CONJUNTO CARTESIANO. PARTICIÓN. RELACIONES. DOMINIO E IMAGEN. MATRÍZ DE UNA RELACIÒN.

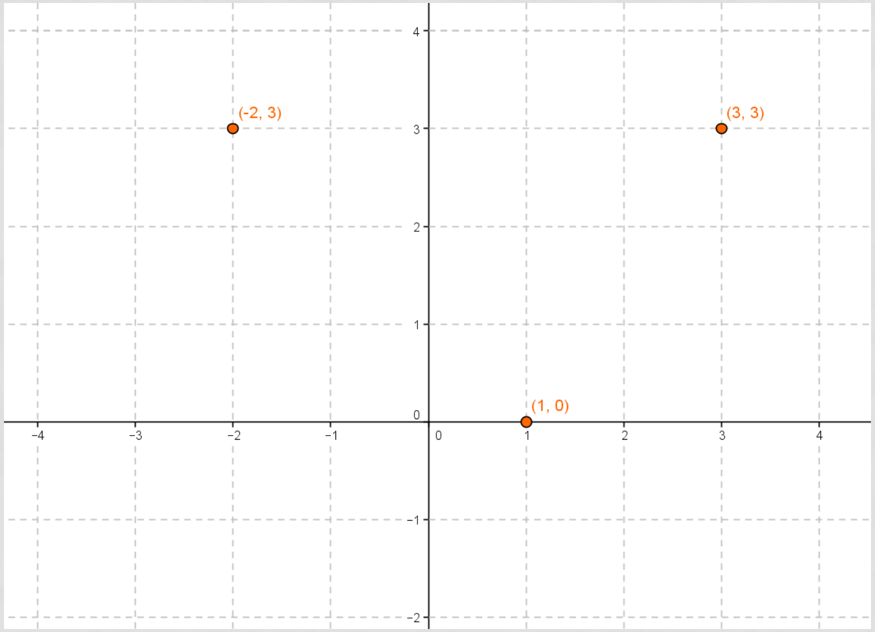
PAR ORDENADO

Se llama par ordenado a todo conjunto con dos elementos en el que cabe distinguir un primer elemento y un segundo elemento.

- notación: (a, b) cuya primer componente es a y cuya segunda componente es b.

Representación Gráfica

Los pares ordenados pueden representarse mediante puntos del plano cuya abscisa y ordenada son, respectivamente la primera y la segunda componente.



PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y la segunda a B.

- En símbolos: **A x B = {(a, b)/a ϵ A ^ b ϵ B}**

EJEMPLO 1. Sean A= {1,2,3} y B = {1,2} entonces:

A x B = {(1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,2) , (3,1) , (3,2)}

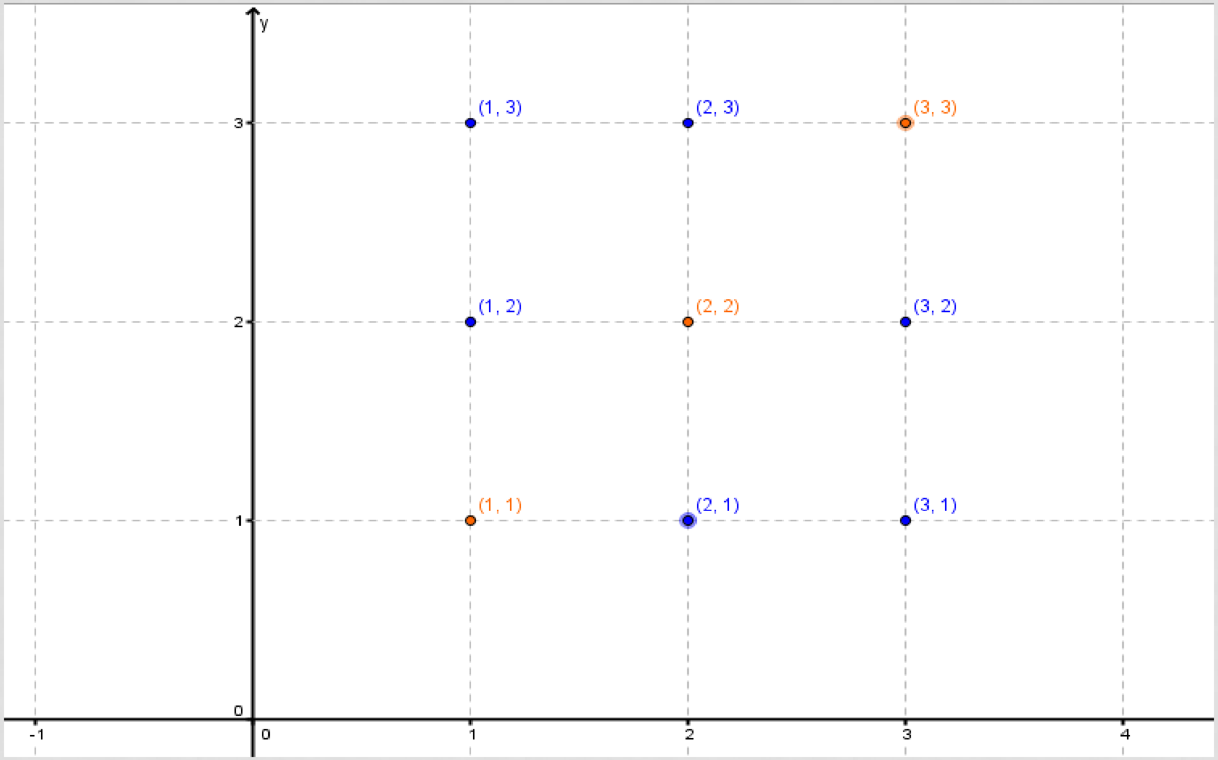
EJEMPLO 2. Sea A={1,2,3} entonces:

$A^2 = \{(1,1), (1,2\ ), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

DIAGONAL

Diagonal de A^2 es el subconjunto de AxA cuyos elementos son de la forma: (a, a). Así:

D(A) = {(1,1), (2,2), (3,3)} ; D(A)$\subset A^2$

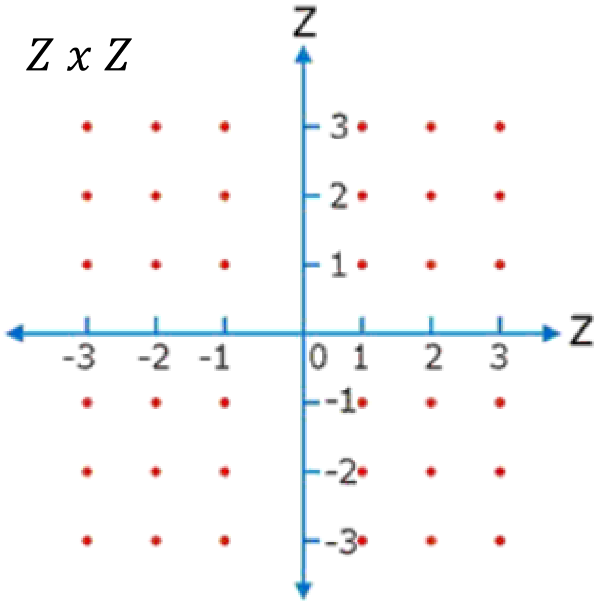


PROPIEDADES DEL CONJUNTO CARTESIANO

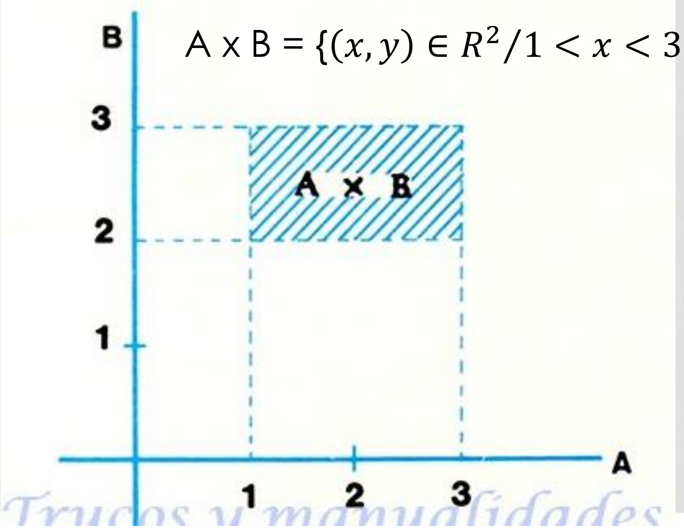
PROPIEDADES
a. A x B $\neq$ B x A, excepto que A = B
b. A x $\emptyset$ = $\emptyset$ x A = $\emptyset$
c. Si A$\subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (AxC) \subset (BxD)$
d. Si $(AxC) \subset (BxD) \wedge AxC \neq \emptyset \Rightarrow$ A$\subset B \wedge C \subset D$
e. (A U B)x C = A x C U B x C
f. (A ∩ B) x C = (A x C) ∩ (B x C)
g. (A-B) x C = (A x C) – (B x C)

ALGUNOS EJEMPLOS

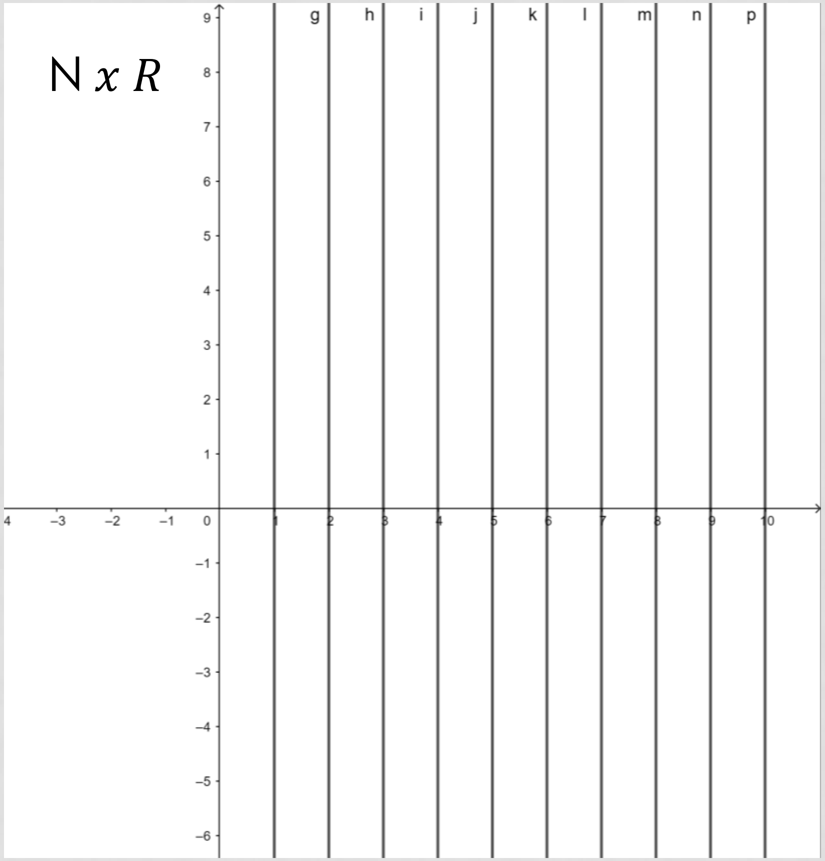
$Z \; x \; Z$



$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x, y) \in R^2 / 1 < x < 3 \; \wedge 2 < y < 3\}$



N $x \; R$



EJERCICIOS

- Representar gráficamente, los siguientes productos cartesianos:

a. $N_0 x\, N_0$

b. N_0x Z

c. N $x\ Z$

d. $Z\ x\ R$

e. A x B = $\{(x, y) \in RxR \quad /|x| < 2 \wedge \ |y| \leq 3\}$

f. A x B = $\{(x, y) \in R^2/1 \leq x < 3 \ \wedge 2 \leq y \leq 5\}$

g. A x B = $\{(x, y) \in R^2/-1 \leq x < 1 \ \wedge \ y \in R\}$

RELACIÓN BINARIA

Una relación binaria entre los elementos de dos conjuntos A y B, es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B.

- En símbolos: $\mathbf{R = \{(a, b) \in A \times B \ / \ a \, R \, b\}}$

El conjunto A se llama CONJUNTO DE PARTIDA de la relación R.

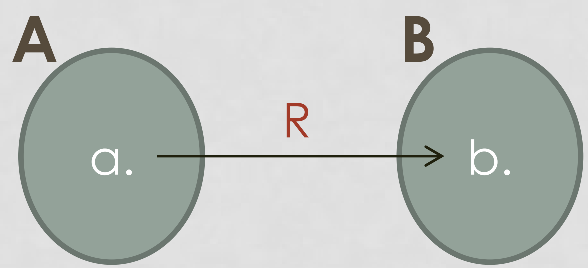
El conjunto B se llama CONJUNTO DE LLEGADA de la relación R.

a se llama *pre-imagen* de b

b se llama *imagen* de a

$a \xrightarrow{\quad R \quad} b$

$(a, b) \in R$



Regresar

RELACIÓN DEFINIDA EN UN CONJUNTO

Si $R \subset AxA$, es decir si el CONJUNTO DE PARTIDA coincide con el CONJUNTO DE LLEGADA, se dice que la relación está definida en el conjunto A.

EJEMPLO: Dados A = {1,2,3,4} y B= {1,2,3} definir por extensión las siguientes relaciones:

$R_1 = \{(a, b) \in AxB / a < b\}$ entonces R_1= {(1,2), (1,3), (2,3)}

$R_2 = \{(a, b) \in AxB / a + b \leq 5\}$ entonces R_2 = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

$R_3 = \{(a, b) \in A^2 / a < b\}$ entonces R_3= {(1,2), (1,3), (1,4) (2,3), (2,4), (3,4)}

DOMINIO E IMAGEN DE UNA RELACIÓN

- DOMINIO DE UNA RELACIÓN

Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación.

-En símbolos: $\boldsymbol{D_R = \{a \in A/(a,b) \in R\}}$ → $\boldsymbol{D_R \subset A}$

- IMAGEN DE UNA RELACIÓN

Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a ella.

-En símbolos: $\boldsymbol{I_R = \{b \in B/(a,b) \in R\}}$ → $\boldsymbol{I_R \subset \mathrm{B}}$

EJEMPLO: $D_{R_1} = \{1,2\}$ y $I_{R_1} = \{2,3\}$

RELACIÓN INVERSA

Dada R ⊂ AxB, se llama inversa de R y se designa R^{-1}, al subconjunto de BxA definido por:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in BxA/(a, b) \in R\}$$

EJEMPLO:

$$R_1{}^{-1} \quad = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

REPRESENTACIONES DE LAS RELACIONES

Sea R ⊂ AxB. En el caso de los CONJUNTOS FINITOS se utilizan los siguientes casos de representaciones:

1. **Mediante diagramas de Venn** ⇨
2. **Gráfico Cartesiano** ⇨
3. **Matriz de la Relación**: arreglo rectangular. Las filas son rotuladas por los elementos de A y las columnas rotuladas por los elementos de B. Se escribe 1 o 0 en cada posición de arreglo, según sea a∊A esté o no relacionado con b∊B.

R1	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	0	0

ACTIVIDAD

Dado A= {-2, 0, 1, 3}

a. Definir por extensión R = {(a, b)∈ $A^2/a + b < 2$}
b. Definir por extensión R^{-1}
c. Graficar AxA, R y R^{-1}
d. Dar dominio e imagen de R y R^{-1}

RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO A

R es una relación definida en A, si y solo si R ⊂ AxA.

Como todo subconjunto de AxA, también expresado A^2, es un elemento del conjunto potencia de A^2, podemos decir…

R es relación definida en A si y solo si R e P(A^2).

Ahora bien, si A tiene n elementos, entonces A^2 tiene n^2 elementos. El conjunto potencia de A^2 tiene 2^{n^2} elementos. Es decir, que A^2 tiene 2^{n^2}subconjuntos. Esto quiere decir que existen 2^{n^2} relaciones definidas en A.

RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO A

EJEMPLO: Formar todas las relaciones definidas en A, si A={1,2}

Como #A= 2 → $\#A^2$= 4 → P(A^2)= 2^4= 16

Hay por tanto, 16 subconjuntos de A^2. Esto quiere decir que hay 16 relaciones definidas en A. Son:

$\emptyset$; {(1,1)}; {(1,2)}; {(2,1)}; {(2,2)}; {(1,1),(2,2)}; {(1,1),(2,1)}; {(1,1),(1,2)} ;{(1,2),(2,1)}; {(1,2),(2,2)}; {(2,1),(2,2)}; {(1,1),(1,2),(2,2)}; {(1,1),(1,2),(2,1)}; {(1,1),(2,1),(2,2)}; {(1,2),(2,1),(2,2)}; {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

RELACIONES DEFINIDAS EN REALES

Las relaciones de tipo: R ⊂ RxR o bien R $\subset R^2$ se representan gráficamente en un plano en el que se ha introducido un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. El dominio se considera sobre el eje de las abscisas; la imagen sobre el eje de ordenadas.

Suele utilizarse la letra x para designar las primeras componentes de los pares ordenados y la letra y para designar las segundas componentes.

EJEMPLO: Representar y definir dominio e imagen de la relación: R= {(x, y)∈ $R^2/y = x + 2$}

ACTIVIDAD

Dados: A=[-3,3] y B=[-2,3)

1. a. Graficar AxB
   b. Graficar R = {(x,y)∊AxB/y=2x}
   c. Dar dominio e imagen de R
2. a. Graficar AxB
   b. Graficar R={(x,y)∊AxB/ y= $x^2 + 1$ }
   c. Dar dominio e Imagen de R
3. a. Graficar AxB
   b. Graficar R= {(x,y)∊AxB/ y=$|x - 1|$ }
   c. Dar dominio e imagen de R