Elementos de la teoría de conjuntos

Conjuntos. Elementos. Pertenencia. Diagrama de Venn. Conjuntos especiales: conjunto vacío y universal. Cardinal de un conjunto. Inclusión e igualdad de conjuntos. Propiedades. Inclusión estricta. Conjunto potencia. Conjuntos reales.

Conceptos primitivos en la teoría de conjuntos

- Elemento
- Conjunto
- Pertenencia

NOTACIÓN:

A={a, b, c}. Conjunto A formado por los elementos a, b, c.

a $\in A$; $b \in A$; $c \in A$; $m \notin A$; ...

Representación por extensión y comprensión de conjuntos

- Definición:

Un conjunto se determina por **extensión** si y solo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen.

Un conjunto se define por **comprensión** si y solo si se da la propiedad que caracteriza los elementos.

Algunos ejemplos

- Conjunto C definido por comprensión

  C={x / x∈ Z ^ $x^2 \leq 9$}
- Conjunto C definido por extensión

  C={-3,-2,-1,0-1,2,3}

- A={1}
- B={x / x ∈ N^$x \leq 1$}
- D={x / x ∈ Z^2 $< x < 5$}
- P={x / x ∈ Z^2 $< x < 3$}
- Q={ x / x ∈ Z ^$x < 3$}

Para cualquier conjunto finito A, |A|o #A denota el **cardinal** de dicho conjunto el cual indica el número de elementos que posee. Ej: |A|=1; |D|=2; |P|= …..

Actividad

- Escribe cada conjunto por comprensión

a. {1,3,5,7,9}
b. {2,4,6,8,10,12,14, …}
c. {r,o,m,a}
d. El conjunto de enteros entre -6 y 6.

- Escribe ahora, los siguientes conjuntos por extensión.

a. El conjunto de números enteros positivos que son divisores de 24.
b. {k/k es un entero y $k^2 < 10$}

Conjuntos Especiales

- Definición: CONJUNTO VACÍO

Un conjunto vacío es aquel que carece de elementos. Se designa con la expresión ∅

$$P = \{x \;/\; x \in Z ^\wedge 2 < x < 3\} = \emptyset$$

¿Por qué?

NOTACIÓN: Simbólicamente podemos representar al conjunto vacío del siguiente modo

$$\emptyset = \{x \;/\; x \neq x\}$$

Ver ejemplo 2, pág. 2 del material teórico

Conjuntos Especiales

EJEMPLO 2

Determine cuál (es) de las proposiciones siguientes define a un conjunto vacío.

a. {m/m es un número primo par}
b. {x/x es un número real tal que x^2 es menor que 0}
c. {y/y es un número entre 4 y 5}
d. {Ø}

Conjuntos Especiales

- Definición: CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto universal depende de la disciplina en estudio, se fija de antemano y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. En general se denota con la letra U o la letra del alfabeto griego Ω.

Conjuntos Especiales

NOTACIONES USUALES

- Si una función proposicional es verdadera para todos los valores de x, su conjunto de verdad es el universal.

$$U = \{x \; / \; v(x)\}$$

- Si una función proposicional es falsa para todos los valores de x, su conjunto de verdad es el vacío.

$$\emptyset = \{x \; / \; v(x)\}$$

INCLUSIÓN

- Definición: Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es parte de B y escribimos $A \subset B$. Cuando esto sucede, decimos que A es **subconjunto** de B.
- En símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B$$

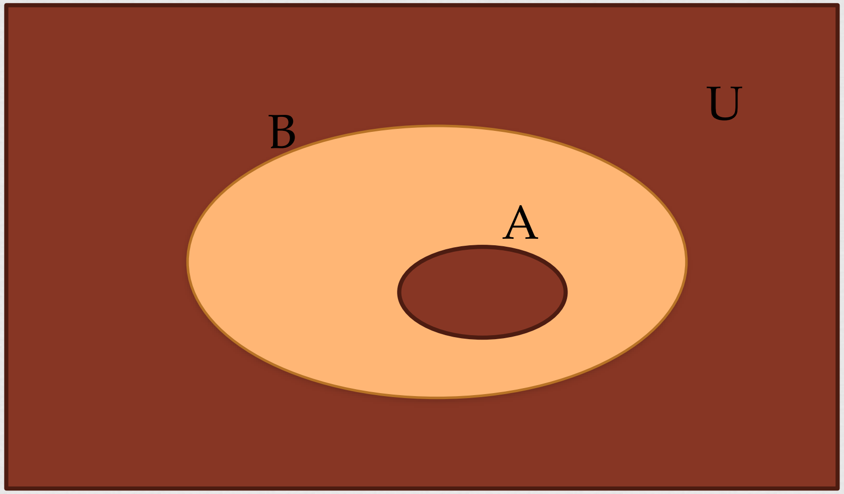
Inclusión Amplia

- En muchos textos se simboliza $A \subseteq B$ para indicar "A está incluido o es igual a B". Este tipo de relación recibe el nombre de inclusión amplia.

Prescindiremos de esta notación, ya que nuestra definición de inclusión no excluye la posibilidad de que ambos conjuntos sean iguales.

Diagramas de Venn

Existe una representación visual de los conjuntos dada por diagramas llamados Diagramas de Venn.



$A \subset B$

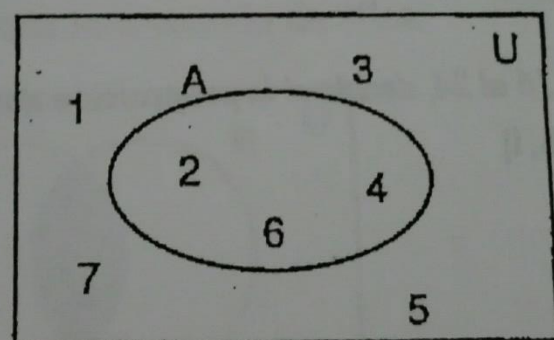
Ver ejemplo 5, página 3 del material teórico.

Diagramas de Venn

EJEMPLO 5

Representε por medio de un diagrama de Venn al conjunto A = {2, 4, 6}, *y considere el conjunto universal* U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Solución:



Igualdad de Conjuntos

- Definición: Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Entonces todo elemento del primero pertenece al segundo y todo elemento de éste pertenece al primero.
- En símbolos:

$$A = B \iff A \subset B \,\hat{}\, B \subset \mathrm{A}$$

¿Son iguales los conjuntos A=$\{x/x^2 = x\}$ y B={x/(x-1).x = 0}?

Ver ejemplo 4, pág. 3 del material teórico

Igualdad de Conjuntos

EJEMPLO 4

a. El conjunto {1,2,3} es igual al conjunto {2,1,3} ya que tienen los mismos elementos.
b. El conjunto T={2,4,6} es igual al conjunto P={2,4,2,6,2,4}.

Propiedades de la relación de Inclusión

- REFLEXIVIDAD. Todo conjunto es parte de sí mismo. En símbolos: $A \subset A$
- TRANSITIVIDAD. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte de un tercero, entonces el primero está incluido en el tercero. En símbolos: si $A \subset B$ y $B \subset C \rightarrow A \subset C$
- ANTISIMETRÍA. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero, entonces son iguales. En símbolos: si $A \subset B$ y $B \subset A \rightarrow A = B$

Caracterización del Conjunto Vacío

Estudiaremos tres propiedades asociadas al concepto de conjunto vacío:

- $\forall a: a \notin \emptyset$ - el conjunto vacío carece de elementos-
- $\forall A: \emptyset \subset A$ –el conjunto vacío está incluido en cualquier otro-
- $\emptyset$ *es único* –el conjunto vacío es único-

Ejercicio A.2

En los ejercicios del 1 al 6 escriba $\in$ o $\notin$ para que la expresión dada sea verdadera.

1. 4 ____ $\{1, 2, 3, 4\}$
2. Júpiter ____ $\{x|x$ es un planeta$\}$
3. 5 ____ $\varnothing$
4. Luna ____ $\{x|x$ es un planeta$\}$
5. $\{4\}$ ____ $\{1, 2, 3, 4\}$
6. 5 ____ Ω ← VER

En los ejercicios del 7 al 14 decida si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes.

7. $\{3, 4\} = \{4, 3\}$
8. $a \in \{h, o, l, a\}$
9. $\{\text{Marte}\} \subseteq \{k|k$ es un planeta del sistema solar$\}$
10. $\{a, m, a, b, a\} = \{a, b, m\}$ ← VER
11. $3 \notin \{2, 4, 6\}$
12. $\{2, 3\} \supseteq \{2, 4, 6, 8\}$
13. $\{m|m$ es un número natural menor a $2\} = \{1\}$
14. $\{\text{Belice, Honduras, Cuba}\} \subseteq \{e|e$ es un país del Continente Americano$\}$.

15. Demuestre que el conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de cualquier conjunto, A. *Sugerencia:* Suponga que $\varnothing \supseteq A$ y muestre que esto no es posible. ← VER

Para los problemas del 16 al 24, decida si la proposición dada es verdadera o falsa. Considere los conjuntos siguientes:

$U = \{a, b, c, d, f, g, h, i\}$

$A = \{a, c, d\}$

$B = \{f, g\}$

$C = \{a, b, f, g\}$

16. $\{g, f, b\} \subseteq B$
17. $\varnothing \subseteq B$ ← VER
18. $A \subseteq U$
19. $C \supseteq A$

Hagamos ahora una lista con todos los subconjuntos del conjunto M={1,2,3,4}

- El que carece de elementos: ∅ -ver propiedades de conjunto vacío-.
- Los conjuntos de único elemento: {1} ; {2}; {3}; {4}.
- Los que contienen dos elementos: {1,2} ; {1,3} ; {1,4}; {2,3} ; {2,4} ; y {3,4}.
- Los que contienen tres elementos: {1,2,3} ; {1,2,4} ; {1,3,4} y {2,3,4}.
- El que contiene cuatro elementos: {1,2,3,4} –ver propiedades de inclusión-

Conjunto de Partes o Potencia

"Dado un conjunto A, existe un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A"

Este nuevo conjunto recibe el nombre de conjunto potencia de A o conjunto de partes de A.

Notación: $P(A)=\{X/X \subset A\}$

Los elementos de P(A) son conjuntos. Entonces:

P(A) es un conjunto de conjuntos y $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$

* De la actividad anterior, $P(M)= \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}, \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,3,4\}; \{2,3,4\}; M\}$

Actividad

** Dado A= {1,2} ; definir P(A).

Analizamos otro ejemplo

Si A= {a, b, c}, o sea si A tiene tres elementos, entonces el conjunto de todos los subconjuntos o partes de A, $\mathcal{P}$(A) tiene $2^3 = 8$ elementos.

En efecto, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a,b,c\}\}$

Tener en cuenta que si A tiene n elementos, entonces P(A) tendrá 2^n elementos, dado que estamos contando todos los subconjuntos posibles de n elementos incluyendo el conjunto vacío y el mismo conjunto A.

Intervalos de números reales

Es frecuente cuando se trabaja con subconjuntos de R, usar la notación y terminología de “intervalos”. Los mismos son utilizados para expresar el Conjunto Solución de determinadas relaciones numéricas.

Un intervalo puede ser abierto, cerrado, semiabierto o infinito. Veamos algunos de ellos:

- Intervalo abierto: (a; b)={x/x ∈ R ^$a < x < b$}
- Intervalo infinito: [a; ∞)={x/x ∈ R ^$x \geq a$}

Intervalos de números reales

Actividad: Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades en R. Expresar la solución como conjunto dado por comprensión y por extensión.

a) $x>3$ $\qquad$ A= $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 3\}$ $\qquad$ A= $(3; +\infty)$

---

b) $2x-1 < ½$

c) $|x+1| > 5$

d) $-2|x+1|-1< 3$