Cada vez que se utiliza una cantidad considerable de datos se hace necesario organizarlos de manera que se puedan manejar e identificar sin dificultad. Una manera de lograrlo es escribir los datos en forma tabular, de esta forma adquieren significado y se pueden manipular de manera muy simple y ágil. Esta disposición de los datos corresponde a las matrices. Arthur Cayley introdujo las matrices y tuvo la capacidad de ver y descubrir que esas cajas numéricas se podían considerar como un nuevo tipo de objetos matemáticos. Interpretó que si podía dar definiciones apropiadas para la suma y la multiplicación lograría crear un nuevo sistema matemático como modelo para muchas aplicaciones en las ciencias sociales, naturales y la economía. En este trabajo práctico, estudiaremos cómo funcionan estos objetos bajo las operaciones elementales. Al mismo tiempo calcularemos matrices inversas, que junto con el cálculo de determinantes, nos permitirán establecer conexiones con las unidades ya trabajadas.

OPERACIONES CON MATRICES

1. Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})$ de 3x2 que cumple:

   $a_{ij} = 1$ si $i = j$

   $a_{ij} = -1$ si $i \neq j$

2. Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})$ de 3x3 que cumple:

   $a_{ij} = 0$ si $i < j$ $\quad a_{ij} = -1$ si $i \geq j$

3. Realiza las operaciones indicadas con $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

   a. 3A
   b. -7A+2C
   c. $C^t - A^t - B^t$
   d. 6B-7A+0C
   e. B- (2A+C)
   f. -3B+4C
   g. Encuentra una matriz D tal que 2A+B-D es la matriz cero de 2x3.
   h. Encuentra una matriz G tal que A+B+G es la matriz de 2x3 con todos sus elementos iguales a 1.

4. ¿Son iguales las matrices? Justifica.

   a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3+1 & 1-2 & 5+1 \\ -2 & 1+2 & 3-3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

Verifica que si bien A.B = A.C, B y C no son iguales, es decir, el producto de matrices no es cancelativo.

6. En los problemas 23 a 28, realiza los cálculos indicados.

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la siguiente ecuación para X: 3.(2A+B+X) = 5.(X-A+B).
8. Dados $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la siguiente ecuación para X:

   AX+BX=C
9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, verifica que:
   a. $(3A)^t = 3.A^t$ b. $A.B \neq B.A$

10. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, verifique que: $(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

---

11. En los problemas 1 a 12 determina si la matriz dada es invertible. De ser así, calculala.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 48 \\ 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Muestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.
13. Muestra que para A y B matrices invertibles de nxn, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
14. De manera análoga, muestra que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}.\ B^{-1}.A^{-1}$
15. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

16. Calcula la forma escalonada por renglones de la matriz del problema 7 y utilizala para determinar en forma directa si es invertible.
17. Aplica el resultado del teorema 2.4.5 (pág. 107) para determinar la inversa de la matriz del problema 1.

DETERMINANTE

---

18. En los problemas 1 al 16 calcula el determinante. Utiliza las propiedades siempre que sea posible.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ -8 & -8 & 10 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} -6 & 8 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -7 \\ 9 & -9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ **16.** $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

19. En los siguientes ejercicios, calcule el determinante sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

28. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ **29.** $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$ **34.** $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$ **35.** $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ **33.** $\begin{vmatrix} 4a_{11} & -2a & 3a_{12} \\ 4a_{21} & -2a_{23} & 3a_{22} \\ 4a_{31} & -2a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

20. Utilice el cálculo de la matriz adjunta para determinar, de ser posible, las inversas de las siguientes matrices (teorema 3.3.3, pág. 212).

4. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$